Primal–duale Triplex–Verfahren

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
dem Fachbereich Mathematik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Konrad Gerull
aus Stadthagen

1974

75 363

Primal–duale Triplex–Verfahren

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
dem Fachbereich Mathematik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Konrad Gerull
aus Stadthagen

1974

Tag der mündlichen Prüfung:	12.12.1974
Dekan:	Prof. Dr. A. Schönhage
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. K. Zeller
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. H. Tzschach

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 1

Kapitel I: Primale und duale Triplex-Verfahren

§ 1 Definitionen und Bezeichnungen 6
§ 2 Das Triplex-Verfahren von Künzi/Kleibohm 11
§ 3 Die p-Basis und die d-Basis 17

Kapitel II: Kritik des Duoplex- und Triplex-Verfahrens

§ 4 Zur Kritik des Duoplex-Verfahrens 21
§ 5 Indifferenz der p-Basis bezüglich Zulässigkeit 24
§ 6 Redundanz und Zulässigkeit 28
§ 7 Die Verteilung der Triplex-Koeffizienten 31
§ 8 Verzerrung der Winkel bei Variablen-Transformation 37
§ 9 Beispiele: Ungünstige Fälle des Triplex-Verfahrens 39

Kapitel III: Primal-duale Triplex-Verfahren

§ 10 Die pd-Basis 41
§ 11 Normierte Triplex-Basen 44
§ 12 Austausch-Koeffizienten 46
§ 13 Triplex-Verfahren mit Suboptimierung 48
§ 14 Das vollständige Verfahren 50
§ 15 Anwendung auf LP-Probleme mit Gleichungen 52
§ 16 Vergleich des Rechenaufwandes 54

Kapitel IV: Effektivitätsvergleiche der Triplex-Basen

§ 17 Spezialfälle 57
a) Effektivität bei extremen Triplex-Winkeln
b) Effektivität bei Parallelität und Redundanz
c) Hinreichende Bedingungen für Entartungsfälle
§ 18 Zufallsverteilte Koeffizienten 66

Kapitel V: Numerische Ergebnisse 69

Literaturhinweise 74

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546514_0097

Einleitung

Seit der Entwicklung des grundlegenden Verfahrens der Linearen Optimierung im Jahr 1947, dem Simplex-Verfahren von Dantzig, sind mehrere hundert Arbeiten mit Modifikationen und Ergänzungen veröffentlicht worden (vgl. z.B. [4 , Kap. 2 und Literaturverzeichnis]).

Sieht man von besonderen Problemstellungen ab (z.B. Stochastisches oder Ganzzahliges Optimieren), so lassen sich bei den Verbesserungen des Simplex-Verfahrens im wesentlichen zwei relativ unabhängige Richtungen unterscheiden:

Eine Richtung ist die Einsparung redundanter Rechenoperationen beim Basistausch. Sie ist nach der Entwicklung der revidierten Simplex-Methode (z.B. [13]), der symmetrisch revidierten Simplex-Methode ([16] und z.B. [13]) und insbesondere der Methode der expliziten Basisinversen sowie der Produktform der Inversen (z.B. [13] , bes. auch [3]) zu einem gewissen Abschluß gekommen.
In diese Richtung ist auch die Anwendung der Suboptimierung einzuordnen (z.B. [24]), insbesondere bei Dekompositionsverfahren (z.B. [13], Kap. IV).

Die andere Richtung von Verbesserungen des Simplex-Verfahrens ist die, durch eine verbesserte Auswahl der Austauschzeilen und -spalten die Gesamtzahl der Austauschschritte zu erniedrigen. Verschiedene solche Varianten, insbesondere für die Auswahl der Pivotspalten, sind in [24] numerisch getestet worden. Weitere Varianten sind in [4 , Kap. 11] zusammengestellt, insbesondere die auf Lemke [15] zurückgehende duale Simplex-Methode sowie der primal-duale Algorithmus von Ford und Fulkerson. Weitere Versuche, durch eine Kom-

bination des primalen und des dualen Ansatzes Zulässigkeit und Optimalität zugleich anzustreben und dadurch gegenläufige AT-Kriterien in den zwei Phasen des Simplex-Verfahrens zu vermeiden, finden sich bei [1] und [20] . Auch das Duoplex-Verfahren [10] , [14] und [13] und das Triplex-Verfahren von Künzi/Kleibohm [11] ,[12] sind zu dieser zweiten Richtung der Verbesserungen des Simplex-Verfahrens zu rechnen, insbesondere auch die vorliegende Arbeit, in der das Triplex-Verfahren durch Anwendung des zuvor genannten primal-dualen Ansatzes weiterentwickelt wird.

Der Ausgangspunkt des Duoplex- und Triplex-Verfahrens ist die - zunächst eher heuristisch begründete - Einsicht, daß solche Restriktionen, deren nach außen gerichtete Normale mit dem Gradienten der Zielfunktion die kleinsten Winkel ("Triplex-Winkel") bilden, eine besonders große Wahrscheinlichkeit haben, im Optimalpunkt aktiv zu sein; sie werden daher vor der eigentlichen Optimierung des Problems zu Nichtbasis-Restriktionen bestimmt (s. auch § 2).
Beide Verfahren sind trotz der Verwendung von Gradienten keine Gradientenverfahren im Sinne approximativer Verfahren mit Fortschreiten in Richtung der Zielfunktion, wie sie besonders in der Nichtlinearen Optimierung verwendet werden; sie haben also trotz des ähnlichen Namens keinen unmittelbaren Zusammenhang mit dem Multiplex-Verfahren von Frisch ([7] und z.B. [9]), einem Gradientenverfahren der Linearen Optimierung.

Der vorliegenden Arbeit liegt die Idee zugrunde, das Triplex-Verfahren auch auf die duale Problemstellung anzuwenden; die entstehende "duale Triplex-Basis" ist

im Sinne der Dualitätstheorie der primalen gleichwertig, aber von ihr weitgehend unabhängig, und kann als weitere Basis für das primale Problem verwendet werden. Aus beiden Triplex-Basen wird dann auf verschiedene Weise eine Kombination gebildet, die "primal-duale Triplex-Basis", die in der Regel effektiver ist als jede von ihnen.
Bei den "primal-dualen Triplex-Verfahren" werden noch verschiedene Korrekturen berücksichtigt, die sich aus einer kritischen Analyse des primalen und entsprechend des dualen Triplex-Verfahrens ergeben.

In Kapitel I wird zunächst das LP-Problem in geeigneter Weise formuliert, um später das primale und das duale Triplex-Verfahren geschickt kombinieren zu können. An eine kurze Darstellung des (primalen) Duoplex- und Triplex-Verfahrens bei Künzi, Künzi/Tschach und Künzi/Kleibohm schließt sich unmittelbar die Definition der "dualen Triplex-Basis" an, um die kritische Analyse des Triplex-Verfahrens in Kapitel II sofort auch auf das duale Triplex-Verfahren zu beziehen.

Kapitel II beginnt mit einer Analyse des Duoplex-Verfahrens, wobei auch ein "duales Duoplex-Verfahren" definiert wird. In § 4 wird nachgewiesen, daß das am Anfang des Duoplex-Verfahrens mit relativ großem Rechenaufwand verwendete Kriterium dem bei jeder Iteration des Simplex-Verfahrens verwendeten AT-Kriterium sehr ähnlich ist: Beim Duoplex-Verfahren wird die Nichtbasisrestriktion mit dem größten, beim Simplex-Verfahren die Basisrestriktion mit dem kleinsten Triplex-Winkel ausgetauscht. Zumindest erscheint daher die besondere Auszeichnung einer Restriktion als Überbewertung.

Bei einer Analyse des Triplex-Verfahrens ist der Nachweis im § 5 von großer Bedeutung, daß die p-Basis

(in beiden Varianten von Künzi/Kleibohm) nur auf die Erreichung der Optimalitätsbedingung $c_j \leq 0$ gerichtet, dagegen indifferent bezüglich der Zulässigkeitsbedingung $b_i \geq 0$ ist; umgekehrt zielt die d-Basis ab auf die Erfüllung von $b_i \geq 0$, ist aber indifferent bezüglich $c_j \leq 0$.
Im § 6 wird der Zusammenhang dieses Sachverhalts zu Redundanz-Problemen beim Triplex-Verfahren hergestellt.
Die anschauliche Motivation des Triplex-Verfahrens im R_2 und R_3 ist in höherdimensionalen Räumen mit Einschränkungen verbunden, die in § 7 untersucht werden.
In § 8 werden weitere geometrische Einschränkungen des Triplex-Verfahrens beschrieben.
§ 9 enthält Beispiele für ungünstige Fälle des Triplex-Verfahrens.

In Kapitel III sind verschiedene neue Varianten des Triplex-Verfahrens dargestellt, die im Zentrum der Arbeit stehen; dabei sollen die im Kapitel II dargestellten besonderen Schwierigkeiten des herkömmlichen Triplex-Verfahrens verringert und die Effektivität allgemein erhöht werden.
Logisch an Kapitel I anknüpfend und unter Berücksichtigung der Sätze in § 5, ist in § 10 die "primal-duale Triplex-Basis" in verschiedenen Abarten definiert.
Durch zusätzliche Varianten in § 11 und § 12 werden die in § 8 bzw. § 7 beschriebenen besonderen Probleme des Triplex-Verfahrens berücksichtigt.
In § 13 und § 14 wird der zweite Teil des "primal-dualen Triplex-Verfahrens" beschrieben, wobei sich die Anwendung von Suboptimierung anbietet.
Wie man das Triplex-Verfahren auf Probleme anwendet, die auch Gleichungen enthalten, ist in § 15 dargestellt.
§ 16 enthält zusammenfassende Tabellen über die ver-

schiedenen Triplex-Koeffizienten und den zugehörigen Rechenaufwand.

In Kapitel IV wird - ergänzend zu den allgemeinen Sätzen in § 5 - untersucht, inwiefern die pd-Basis gegenüber der p- und d-Basis Vorteile hat. In § 17 werden spezielle Situationen betrachtet, während § 18 relativ allgemeine und praxisnahe LP-Probleme behandelt, wobei naturgemäß nicht ganz so konkrete Sätze zu erreichen sind.

Kapitel V enthält die Ergebnisse von numerischen Tests zu verschiedenen Triplex-Varianten, die sich an die von Künzi/Kleibohm durchgeführten Tests in [11] und [12] anlehnen. Im wesentlichen werden dabei die theoretischen Ergebnisse dieser Arbeit bestätigt.

Herrn Prof. Dr. Zeller möchte ich für viele wertvolle Anregungen und Ratschläge herzlich danken, ebenso Herrn Dr. Kleibohm, der die noch verfügbaren Testunterlagen zur Verfügung stellte.

Kapitel I: Das primale und das duale Triplex-Verfahren

§ 1 Definitionen und Bezeichnungen

Für das Ausgangsproblem der Linearen Optimierung wird eine spezielle Formulierung gewählt, so wie sie für die vorliegende Arbeit zweckmäßig ist. Im wesentlichen - bis auf die Indizierung der dualen Variablen - folgt die Darstellung der von Künzi/Tan [13, Kap. I und III]. Für grundlegende Definitionen und Sätze kann i.a. auf Dantzig [4] verwiesen werden.

Das LP-Problem sei gegeben in der Form:

Maximiere $L = c\,x$

unter den Nebenbedingungen $Ax \leq b\ ,\ x \geq 0$ (1.1)

mit $A = A_{m\,x\,n} = (a_{ij})\ ,\ x = \{x_1,\ldots,x_n\}$,

$b = \{b_1,\ldots,b_m\}\ ,\ c = \{c_1,\ldots,c_n\}$.

Das dazu duale Problem lautet:

Minimiere $L' = u\,b$

unter den Nebenbedingungen $uA \geq c\ ,\ u \geq 0$ (1.2)

mit $u = \{u_{n+1},\ldots,u_{n+m}\}$.

In Komponentenschreibweise ergibt sich daraus unter Einführung der primalen und dualen Schlupfvariablen $x_{n+1},\ldots,x_{n+m}$ bzw. $u_1,\ldots,u_n$ die folgende Formulierung:

primal:

$$\text{Max.}\quad L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.3}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1,\ldots,n) \tag{1.4}$$

$$x_{n+i} = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i \geq 0 \quad (i=1,\ldots,m). \tag{1.5}$$

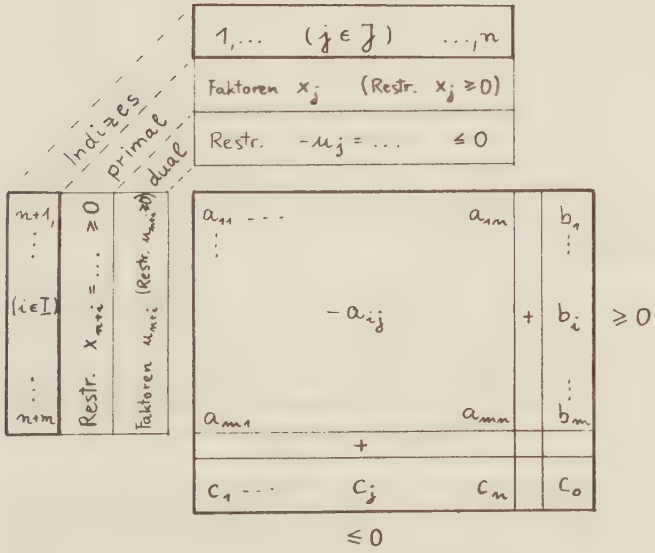
dual:

$$\text{Max} \quad (-L') = -\sum_{i=1}^{m} b_i u_{n+i} \tag{1.6}$$

$$u_{n+i} \geq 0 \quad (i=1,\ldots,m) \tag{1.7}$$

$$u_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_{n+i} - c_j \geq 0 \quad (j=1,\ldots,n). \tag{1.8}$$

Anschließend an die Tableau-Darstellungen bei Dantzig [4 , Kap. 6], [13, Kap. 1.2] und besonders Balinski/ Gomory [1 ,(1.1)-(1.2)] läßt sich die primale und duale Problemstellung im folgenden Tableau gemeinsam schematisieren:



Die sich an [1] anlehnende Indizierung der dualen Variablen hat gegenüber üblicheren Formulierungen des Problems den Vorteil, daß sich eine sinnvolle Zuordnung primaler und dualer Variablen ergibt, so wie sie für die weitere Arbeit erforderlich ist (vgl. bes. Def. 10.1).

1.1 Bezeichnung

Primale und duale Variable, die in der Formulierung (1.3) - (1.8) des LP-Problems den gleichen Index k (k=1,...,m+n) haben, heißen einander zugeordnete oder entsprechende Variable.

1.2 Bemerkung

Die Begriffe "zugeordnet" und "entsprechend" sind Dantzig [4 , S. 146] entnommen, wo stattdessen auch noch "zugehörig" steht; jedoch sind bei Dantzig alle drei Begriffe nur auf die Beziehung zwischen Variablen und Relationen bezogen.
Andere Autoren wenden die Begriffe (im Englischen "complementary" und "corresponding") ebenfalls auf Paare von Variablen oder Restriktionen an, z.B. Tucker ([22], "corresponding inequalities") und Orchard-Hays ([18 , § 5.1.1], "complementary variable" und "primal-dual complementary pair").

Mathematische Aussagen über zugeordnete Variable bzw. Restriktionen liefert der Komplementaritätssatz (z.B. [13 , Kap. I, Satz 6], wo gilt: $Ax-b = \{x_{n+1},\ldots,x_{n+m}\}$ und $uA-c = \{u_1,\ldots,u_n\}$) und konkreter noch Orchard-Hays [18, § 5.1.1, Theorem 6 und 7].

Diese Aussagen werden, in Form und Umfang auf die Erfordernisse der vorliegenden Arbeit abgestimmt, im folgenden Satz wiedergegeben.

1.3 Satz

Für die Formulierung des LP-Problems gemäß (1.3)-(1.8) mit dem zugehörigen Simplex-Tableau (1.9) gilt:

1. Jedem Index k (k=1,...,m+n) ist im Tableau (1.9) eineindeutig eine Zeile oder Spalte zugeordnet; d.h. die Variablen x_k und u_k bezeichnen dieselbe Zeile oder Spalte.

2. Die Eigenschaft 1.3.1 bleibt nach einem Austauschschritt erhalten und gilt somit für jede Basisdarstellung.

3. In jeder Basisdarstellung ist für jedes $k \in \{1,\ldots,m+n\}$ eine der Variablen x_k und u_k abhängige und eine unabhängige Variable, d.h. eine ist Basisvariable (BV) und eine Nichtbasisvariable (NBV).

4. In jedem Basispunkt (d.h. jeder Basislösung) ist für jedes $k \in \{1,\ldots,m+n\}$ $x_k u_k = 0$; d.h. eine der Restriktionen $x_k \geq 0$ und $u_k \geq 0$ wird genau erfüllt (man sagt auch, die Variable x_k bzw. u_k sei im entsprechenden Basispunkt "aktiv").

Beweis:

1. ergibt sich unmittelbar aus dem Tableau (1.9).
2. gilt, da bei der dualen Betrachtungsweise jeweils die den primalen Variablen zugeordneten Variablen ausgetauscht werden.
3. folgt mit 2. aus dem Tableau (1.9).
4. gilt wegen 3., da in jedem Simplex-Tableau, d.h. jeder Basisdarstellung, die primal und dual unabhängigen Variablen Null gesetzt werden.

Durch die Auswahl von m (linear unabhängigen) Variablen als BV wird bekanntlich eine Basis eines LP-Problems bestimmt (vgl. Dantzig [4 , S. 95]). Für die

Definition verschiedener Triplex-Basen (bes. in § 10) ist es erforderlich, eine Basis stattdessen durch die Vorgabe einer Indexmenge aus $\{1,\ldots,m+n\}$ festzulegen. Da nach 1.3.3 jeder Index sowohl einer BV als auch einer NBV zuzuordnen ist, werden hierbei eindeutige Bezeichnungen notwendig.

1.4 Definition/Bezeichnung
Basis-Index (Abk.: BI) ist jeder Index einer primalen Basisvariablen.
Die Menge der Basis-Indizes wird in Anlehnung an den üblichen Laufindex i mit I bezeichnet.

1.5 Definition/Bezeichnung
Die Komplementmenge $J := \{1,\ldots,m+n\} \setminus I$ ist die Menge der Nichtbasis-Indizes (Abk.: NBI).

1.6 Bezeichnung
Die Menge der BI bzw. NBI der r-ten Iteration sei mit I_r bzw. J_r bezeichnet, die optimale Basis mit I_{opt}.
Z.B. ist $I_o = \{n+1,\ldots,n+m\}$.

1.7 Bemerkung
1. Eine Basis wird eindeutig bezeichnet durch die Angabe einer Indexmenge I oder J.

2. Wegen 1.3.3 ist die Menge I auch die Menge der NBI des dualen Problems, und J die der BI des dualen Problems.

1.8 Bemerkung/Bezeichnung
Durch gleiche Indizes sind den Variablen x_k und u_k ($k \in I \cup J$) auch die Hyperebenen $x_k = 0$ bzw. $u_k = 0$, die Restriktionen (Ungleichungen) $x_k \geq 0$ bzw. $u_k \geq 0$ sowie Gradienten, Winkel usw. zugeordnet.
Je nach Zuordnung der Indizes zu I oder J wird im folgenden auch von Basis- oder Nichtbasis- -Restriktionen, -Gradienten,-Winkeln usw. gesprochen.

§ 2 Das Triplex-Verfahren von Künzi/Kleibohm

In diesem Abschnitt soll das Triplex-Verfahren von Künzi/Kleibohm [11] und [12] kurz dargestellt werden. Dabei sind für eine spätere Unterscheidung präzisere Definitionen und neue Bezeichnungen erforderlich; auch werden die dort definierten Triplex-Koeffizienten explizit angegeben.

2.1 Definition
Triplex-Winkel (bei einem LP-Problem) sind die Winkel zwischen dem Gradienten der Zielfunktion und den nach außen gerichteten Normalen der Restriktionen.

2.2 Bemerkung
Triplex-Winkel sind nicht invariant gegen Basistransformationen; wenn nicht anders angegeben, beziehen sie sich immer auf das Ausgangs-Problem (1.3) - (1.8).

2.3 Definition
Die primalen Triplex-Winkel (kurz: p-Winkel) sind die Triplex-Winkel der primalen Problemstellung, also die Winkel zwischen grad $L = c$ und den Gradienten von $x_k =: f_k(x)$ $(k \in I \cup J)$, wobei $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ wie in (1.1).

2.4 Definition
Sind φ_k $(k \in I \cup J)$ die p-Winkel gemäß (2.3), so sind die primalen Triplex-Koeffizienten (kurz: p-Koeffizienten)

$$w_k := \cos \varphi_k \qquad (k \in I \cup J).$$

2.5 Bemerkung
Die expliziten Werte der Triplex-Koeffizienten sind der besseren Übersicht wegen in der Tabelle (2.4) am Ende von § 2 hergeleitet; dort ergibt sich für die p-Koeffizienten

$$w_j = -\frac{c_j}{|c|} = -\frac{c_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} c_j^2}} \quad (j=1,\ldots,n) \qquad (2.1)$$

$$w_{n+i} = \frac{c \cdot a_{n+i}}{|c||a_{n+i}|} = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j a_{ij}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} c_j^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}} \quad (i=1,\ldots,m), \qquad (2.2)$$

wobei a_{n+i} die Zeilenvektoren der Matrix A sind.

2.6 Definition

Eine Triplex-Basis ist eine mit Hilfe von Triplex-Winkeln bestimmte Basis eines LP-Problems.
Nach Bemerkung 1.7.1 wird sie i.a. durch eine Indexmenge bezeichnet.

2.7 Definition

Eine primale Triplex-Basis (kurz: p-Basis) ist eine unter Verwendung von p-Winkeln (Def. 2.3) bestimmte Basis.

2.8 Bemerkung/Bezeichnung

Künzi/Kleibohm [12] haben zwei verschiedene p-Basen (Variante I und II) beschrieben, die mit p_1-Basis (vgl. Def. 2.10) und p_2-Basis bezeichnet werden sollen. Weitere p-Basen werden in Kapitel III definiert.

Wenn im folgenden mitunter von "der" p-Basis die Rede ist, so ist damit die p_1-Basis gemeint; alle anderen p-Basen sind nämlich von ihr abgeleitet.

2.9 Definition

Sei K eine endliche Menge $K = \{k_v | k_v \in R,\ v=1,\ldots,|K|\}$.

Rang(k_v) sei der dem Element k_v zugeordnete Rangplatz, den k_v bei einer Sortierung der Menge K der Größe nach einnimmt.
Rang(K) sei die durch Rang(k_v) ($v=1,\ldots,|K|$) gegebene Permutation der Indexmenge $\{1,\ldots,|K|\}$.

2.10 Definition
Die p_1-Basis ist die Indexmenge

$$I_p := \{k \mid k \in I \cup J, \quad \text{Rang}(w_k) > n\}, \qquad (2.3)$$

wobei $\{w_k \mid k \in I \cup J\}$ die p-Koeffizienten (2.1) - (2.2) sind.

2.11 Bemerkung
Die p_1-Basis ist auch bestimmt durch

$$J_p := \{k \mid k \in I \cup J, \quad \text{Rang}(w_k) \leq n\}$$

als $I_p := (I \cup J) \setminus J_p$.

2.12 Bemerkung
Die p_1-Basis ändert sich nicht, wenn die p-Koeffizienten (2.1) - (2.2) durch Fortlassen der Faktoren $|c|$ im Nenner vereinfacht werden
(vgl. hierzu [12], Formel (5) beim Duoplex-Verfahren).

Duoplex- und Triplex-Verfahren bei Künzi/Kleibohm

Die Grundidee des Duoplex- und Triplex-Verfahrens ist die - heuristisch-geometrisch begründete - Einscht, daß "flache" Restriktionen, d.h. solche mit kleinen Triplex-Winkeln, eine besonders große Wahrscheinlichkeit haben, im Optimalpunkt aktiv zu sein, d.h. optimale NBR (Nichtbasis-Restriktion) zu sein.

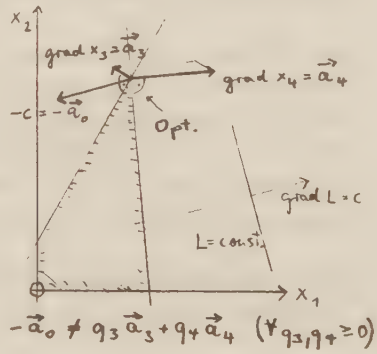
Beim Duoplex-Verfahren wird die Variable mit dem flachsten Basis-Winkel (für die also gilt: Rang(w_k)=1, $k \in I$)

ausgetauscht; im weiteren Verfahren nimmt dieser NBI eine Sonderstellung ein, wobei nach einem leicht modifizierten Simplex-Verfahren fortgefahren wird.

Beim Triplex-Verfahren (Variante I) werden Basis- und Nichtbasis-Winkel berücksichtigt; die m steilsten der m+n Restriktionen werden zu Basisrestriktionen bestimmt. Die so definierte Triplex-Basis, die mit der p_1-Basis übereinstimmt (vgl. 2.8 und 2.10), wird als Ausgangsbasis des LP-Problems betrachtet und mit der dafür besonders geeigneten "Produktform der Inversen" nach einer weitgehend beliebigen Variante des Simplex-Verfahrens weiter optimiert.

Variante II des Triplex-Verfahrens verwendet unmittelbar nur die Gradienten der Restriktionen, geht aber in Reihenfolge $\mathrm{Rang}(w_k)$, $k \in I \cup J$ vor, so daß die p-Koeffizienten auch verwendet werden.
Es wird dabei versucht, den Vektor c als eine positive Linearkombination von n geeigneten Restriktionen-Gradienten darzustellen, wodurch eine nach dem Kuhn-Tucker-Theorem notwendige Bedingung für optimale Nichtbasis-Restriktionen erfüllt wäre. Die so gefundenen Variablen werden also zu NBV bestimmt.

Die unausgesprochene Motivation für diese Abwandlung der Variante I mag die folgende sein:
Wie die nebenstehende Skizze veranschaulicht, gilt die Kuhn-Tucker-Bedingung nicht für jede Basisdarstellung, sondern nur für die optimale. Daher mag es leichter sein, aus dem Restvektor a_r (nach Abzug einiger - meist "richtiger" - Anteile an der Linearkombination vom Vektor c) die noch fehlenden Re-



striktionen zu kombinieren als aus c selbst; denn die Winkel der noch fehlenden "richtigen" Restriktionen mit dem Restvektor a_r im R_{n-r} werden eher kleiner sein als die mit c selbst, so daß auch Restriktionen mit im Ausgangsproblem sehr großen Winkeln doch noch richtig als optimale NBR herausgefunden werden können. Doch diese Betrachtungen sind in dieser Form auch eher als heuristisch zu verstehen.

Für eine genaue Beschreibung von Duoplex- und Triplex-Verfahren muß auf die Arbeiten [10], [11], [13] und [14] hingewiesen werden.

Auf das Kuhn-Tucker-Theorem im Zusammenhang mit dem Triplex-Verfahren wird im § 5 noch einmal eingegangen.

Tabelle zur Herleitung der Triplex-Koeffizienten (2.4)

	primal	dual
Ausgangsprobleme $i \in I$: mit Restriktionen $f_k(x) \geq 0$, $k \in I \cup J$; $f'_k(u) \geq 0$, $k \in I \cup J$; $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$; $u = \{u_{n+1}, \ldots, u_{n+m}\}$	$f_{n+i}(x) = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i \geq 0$	$f'_n(u) = u_{n+i} \geq 0$
$j \in J$:	$f_j(x) = x_j \geq 0$	$f'_j(u) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_{n+i} - c_j \geq 0$
	Max. $L(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	Max. $-L'(u) = -\sum_{i=1}^{m} u_{n+i} b_i$
Gradienten		
... der Zielfunktionen in opt. Richtung	$\text{grad}(L) = \{c_1, \ldots, c_n\}$	$-\text{grad}(L') = \{-u_{n+1}, \ldots, -u_{n+m}\}$
... der Restriktionen (nach außen) $i \in I$:	$-\text{grad}(f_{n+i}) = \{a_{i1}, \ldots, a_{in}\}$	$-\text{grad}(f'_{n+i}) = \begin{cases} \{-1,0,..,0\} & (i=n+1) \\ \vdots & \\ \{0,..,0,-1\} & (i=n+m) \end{cases}$
$j \in J$:	$-\text{grad}(f_j) = \begin{cases} \{-1,0,..,0\} & (j=1) \\ \vdots & \\ \{0,..,0,-1\} & (j=n) \end{cases}$	$-\text{grad}(f'_j) = \{-a_{1j}, \ldots, -a_{mj}\}$
Triplex-Koeffizienten $w = \cos\varphi = \frac{-\text{grad}(f)\cdot\text{grad}(L)}{\lvert\text{grad}(f)\rvert\lvert\text{grad}(L)\rvert}$	$w_{n+i} = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j}{\lvert a_i\rvert\lvert c\rvert}$ $(i \in I)$	$w'_{n+i} = \frac{b_i}{\lvert b\rvert}$ $(i \in I)$
	$w_j = \frac{-c_j}{\lvert c\rvert}$ $(j \in J)$	$w'_j = \frac{\sum_{i=1}^{m} a_{ij}b_i}{\lvert a_j\rvert\lvert b\rvert}$ $(j \in J)$
pd-Koeffizienten	$W_k = w_k - w'_k$ $(k \in I \cup J)$	

§ 3 Die p-Basis und die d-Basis

Die Formulierung des Triplex-Verfahrens im § 2 legt es nahe, ein entsprechendes Verfahren mit den zugehörigen Begriffen auch für die duale Problemstellung einzuführen. Der Sinn dieses Vorgehens ist jedoch nicht die formale Beschreibung des dualen Standpunktes; vielmehr sollen dadurch weitere Triplex-Basen für das (primale) Ausgangsproblem gewonnen werden. Dennoch lehnt sich der folgende Abschnitt im wesentlichen an 2.3 - 2.12 an.

3.1 Definition
Die dualen Triplex-Winkel (kurz: d-Winkel) sind die Triplex-Winkel der dualen Problemstellung, also die Winkel zwischen $\operatorname{grad}(-L') = -b$ und den Gradienten von $u_k =: f_k'(u)$ $(k \in I \cup J)$, wobei $u = \{u_{n+1}, \ldots, u_{n+m}\}$ wie in (1.2).

3.2 Definition
Sind φ'_k $(k \in I \cup J)$ die d-Winkel gemäß 2.3 , so sind die dualen Triplex-Koeffizienten (kurz: d-Koeffizienten)

$$w_k' := \cos \varphi'_k \qquad (k \in I \cup J)$$

3.3 Bemerkung
Die expliziten Werte der Triplex-Koeffizienten sind in der Tabelle (2.4) hergeleitet; dort ergibt sich für die d-Koeffizienten

$$w'_j = -\frac{b \cdot a_j}{|b||a_j|} = -\frac{\sum_{i=1}^{m} b_i a_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^2}} \qquad (j=1,\ldots,n) \tag{3.1}$$

$$w'_{n+i} = -\frac{b_i}{|b|} = -\frac{b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2}} \qquad (i=1,\ldots,m). \qquad (3.2)$$

3.4 Definition
Eine duale Triplex-Basis (kurz: d-Basis) ist eine unter Verwendung von d-Winkeln (Def. 3.1) bestimmte Basis.

3.5 Definition
Die d_1-Basis ist die Index-Menge

$$I_d := \{k \mid k \in I \cup J, \quad \mathrm{Rang}(w'_k) \leq m\}, \qquad (3.3)$$

wobei $\{w'_k \mid k \in I \cup J\}$ die d-Koeffizienten (3.1) - (3.2) sind.

3.6 Bemerkung
Die d_1-Basis ist auch bestimmt durch

$$J_d := \{k \mid k \in I \cup J, \quad \mathrm{Rang}(w'_k) > m\}$$

als $I_d := (I \cup J) \setminus J_d$.

3.7 Bemerkung
Die d_1-Basis ändert sich nicht, wenn die d-Koeffizienten (3.1) - (3.2) durch Fortlassen der Faktoren $|b|$ im Nenner vereinfacht werden.

Zur Definition der d_1-Basis ist folgende Erläuterung angebracht: Die zur p_1-Basis (Def. 2.10) duale Basis ist zunächst gegeben durch eine Basisdarstellung, bei der die n Variablen u_k mit den größten der m+n dualen Triplex-Winkeln duale Basisvariable sind.

Die Art der Darstellung in § 1 mit dem Bezug auf die jeweils zugrundeliegende Indexmenge, insbesondere die Bemerkung 1.7.2, ermöglicht es, die d_1-Basis von vornherein als - weitere - Basis für das primale Problem zu definieren (s. 3.5 bzw. 3.6); dies gilt ebenso für alle weiteren d-Basen.

3.8 Bemerkung

Zu jeder p-Basis läßt sich formal eine d-Basis bilden (vgl. hierzu Bemerkung 2.8).
Mit "der" d-Basis ist im folgenden immer die d_1-Basis gemeint.

Beziehungen zwischen p-Basis und d-Basis

3.9 Lemma

Zwischen p-Koeffizienten und d-Koeffizienten besteht keine feste Kopplung.

Beweis: p-Koeffizienten und d-Koeffizienten sind nicht vollständig unabhängig, wie die Formeln (2.1) - (2.2) und (3.1) - (3.2) unmittelbar zeigen. Es gilt aber:

1. Die zugeordneten Koeffizienten w_k und w'_k sind für alle $k \in I \cup J$ elementweise vollständig unabhängig, da sie elementfremd sind (vgl. die Formeln!); erst zwischen mehreren w_k und w'_k besteht eine gewisse Abhängigkeit.

2. Die w_j $(j \in J)$ sind von den w'_i $(i \in I)$ vollständig unabhängig (elementfremd!); abhängig sind nur die w_j $(j \in J)$ und w'_i $(i \in I)$ untereinander, da sie auf den Vektorbetrag 1 normiert sind.

3. Eine Abhängigkeit der w_i $(i \in I)$ von den w_j $(j \in J)$ besteht durch die Abhängigkeit zwischen Zeilen- und Spaltenvektoren der Matrix A; deren Skalarprodukte mit den (unabhängigen) Vektoren c bzw. b sind jedoch wesentlich unabhängiger.

3.10 Lemma

Zwischen p_1-Basis und d_1-Basis besteht keine feste Kopplung.

Beweis: Die Kopplung zwischen p_1-Basis und d_1-Basis ist nicht größer als die zwischen p- und d-Koeffizi-

enten; denn
1. legen nach Bemerkung 2.12 und 3.7 bereits weniger gekoppelte Koeffizienten die p- und d-Basis fest, und
2. kommt es für die p- und d-Basis nur auf die Grenze des Rangplatzes an, so daß ein Teil der Kopplung nicht relevant wird.

3.11 Bemerkung

p- und d-Basis sind gleichwertig in dem Sinne wie auch die primale und duale Formulierung des Simplex-Verfahrens auf Grund der Dualitätstheorie (z.B. [17], Kap. 3) durch die zueinander dualen Sätze und Formulierungen gleichwertig ist.

Kapitel II: Kritik an Duoplex- und Triplex-Verfahren

§ 4 Zur Kritik des Duoplex-Verfahrens

4.1 Satz

Das Duoplex-Verfahren korrespondiert zum Simplex-Verfahren in der folgenden Weise:

Beim Duoplex-Verfahren wird die BV mit dem kleinsten der m (primalen) Basis-Winkel gegen eine NBV ausgetauscht.

Beim Simplex-Verfahren wird die NBV mit dem größten der n (primalen) Nichtbasis-Winkel gegen eine BV ausgetauscht.

Beweis: Es ist nur der zweite Teil zu zeigen.

Beim Simplex-Verfahren wird die Austausch-Spalte, d.h. die NBV, zuerst ausgewählt, und zwar nach dem Kriterium

$$\max(-c_j \mid c_j \geq 0,\ j \in J).$$

Andere Kriterien werden von Dantzig [4, Kap. 11] definitionsgemäß als "Varianten des Simplex-Verfahrens", d.h. Abänderungen bezeichnet.

Nach Bemerkung 2.12 ändert sich die p_1-Basis nicht, wenn die Faktoren c im Nenner der p-Koeffizienten weggelassen werden. Die Nichtbasis-Koeffizienten w_j $(j \in J)$ werden damit zu $\{-c_j \mid j \in J\}$, so daß der größte Nichtbasis-Winkel gegeben ist durch

$$\max \varphi_j = \min(\cos \varphi_j) = \min(w_j) = \max(-c_j) \quad (j \in J).$$

Er bezeichnet also die Austausch-Spalte beim Simplex-Verfahren, da dieses bereits beendet ist, falls alle $c_j \leq 0 \quad (j \in J)$.

Vor den Folgerungen wird ein hierzu dualer Satz hergeleitet.

4.2 Definition

Das duale Duoplex-Verfahren ist das auf die duale Problemstellung angewendete Duoplex-Verfahren.

4.3 Bemerkung

Beim dualen Duoplex-Verfahren wird also der Nichtbasis-Index (die duale BV) mit dem kleinsten zugeordneten dualen Winkel, d.h. der Index mit

$$\mathrm{Rang}(w'_j \mid j \in J) = 1$$

zuerst ausgetauscht und nimmt dann die übliche Sonderstellung ein.

4.4 Satz

Analog zu Satz 4.1 gilt:

Beim dualen Duoplex-Verfahren wird der NBI (die duale BV bzw. primale NBV nach Bemerkung 1.7.2) mit dem kleinsten zugeordneten dualen Winkel φ'_j $(j \in J)$ gegen einen BI ausgetauscht.
Beim dualen Simplex-Verfahren wird der BI (die primale BV) mit dem größten zugeordneten dualen Winkel φ'_i $(i \in I)$ gegen einen NBI ausgetauscht.

Beweis: Der erste Teil folgt sofort aus Bemerkung 4.3.

Beim dualen Simplex-Verfahren wird die Austauschzeile, d.h. der BI, zuerst ausgewählt, und zwar nach dem Kriterium (vgl. z.B. Dantzig [4, Kap. 11-2])

$$\max(-b_i \mid b_i \leq 0,\ i \in I).$$

Analog zum Beweis des Satzes 4.1 unter Verwendung der Bemerkung 3.7 wird der beim dualen Duoplex-Verfahren ausgezeichnete Index bestimmt durch

$$\max(-b_i \mid i \in I).$$

Dieser stimmt wieder nur dann nicht mit dem beim dualen Simplex-Verfahren bestimmten Index überein, wenn dort bereits das Optimalitätskriterium erfüllt ist.

4.5 Folgerung (Ähnlichkeit der Verfahren)
Die Austausch-Kriterien beim Simplex- und Duoplex-Verfahren entsprechen sich sowohl im primalen (Satz 4.1) wie im dualen (Satz 4.4) Fall insofern, als flache Basiswinkel und steile Nichtbasis-Winkel gleichermaßen - von der Grundidee her gesehen - auszutauschen sind.

4.6 Bemerkung
Die insgesamt vier Kriterien der Sätze 4.1 und 4.4 werden in § 11 und § 12 zu einer Variante des Triplex-Verfahrens weiterentwickelt.

4.7 Folgerung (Unterschiede der Verfahren)

1. Die Berechnung des Austausch-Index erfordert beim Duoplex-Verfahren ca. m·n Multiplikationen mehr (die Skalarprodukte) als beim Simplex-Verfahren; dies gilt im primalen und im dualen Fall.

2. Während beim Simplex-Verfahren das Kriterium nach jedem Austauschschritt wiederholt wird, räumt das Duoplex-Verfahren dem kleinsten Basis-Winkel des Ausgangsproblems eine Sonderstellung für das ganze weitere Verfahren ein.

3. In § 6 und §16 wird gezeigt, daß bei NBR, nicht aber bei BR sich eine Redundanz von Restriktionen ungünstig auf das Duoplex- und Triplex-Verfahren auswirkt.
Das Simplex-Kriterium (Austausch von NBR) hat also gegenüber dem Duoplex-Kriterium (Austausch von BR) den Vorteil, daß durch die Auswahl redundanter Restriktionen weniger Fehler auftreten. Dies gilt wieder im primalen und im dualen Fall.

Der Vergleich mit dem Simplex-Verfahren macht deutlich, daß der beim Duoplex-Verfahren ausgezeichnete Index wohl doch etwas überbewertet ist. - Die folgenden §§ dieses Kapitels gelten sinngemäß ebenfalls für das Duoplex-Verfahren.

§ 5 Indifferenz der p-Basis bezüglich Zulässigkeit

Künzi/Kleibohm [12] haben die "Variante 2" des (primalen) Triplex-Verfahrens mit dem Kuhn-Tucker-Theorem begründet.
In diesem Abschnitt wird diese theoretische Begründung des Triplex-Verfahrens präzisiert (Satz 5.2). Dabei ergibt sich einerseits eine Einschränkung für die Wirksamkeit des primalen Triplex-Verfahrens (Satz 5.3), andererseits aber auch eine theoretische Begründung des dualen Triplex-Verfahrens (Satz 5.4). Die Sätze 5.3 und 5.4 ergeben einen Hinweis auf die Zweckmäßigkeit kombinierter Verfahren (Kapitel III).

Die Kuhn-Tucker-Bedingungen lauten in der Formulierung von Vogel ([22], S. 93)

$$\begin{array}{lll} D_u \varphi(x_o,u_o) \geqslant 0 & u_o \geqslant 0 & D_u \varphi(x_o,u_o)\cdot u_o = 0 \\ D_x \varphi(x_o,u_o) \leqslant 0 & x_o \geqslant 0 & D_x \varphi(x_o,u_o)\cdot x_o = 0 \end{array} \qquad (5.1)$$

mit der Lagrange-Funktion $\varphi(x,u) = \psi(x) + u'f(x)$ zum Problem $\max\{\psi(x) \mid f(x) \geqslant 0\ ;\ x \geqslant 0\}$, wobei $x_o = (x_1,\ldots,x_n)_{opt}$ und $u_o = (u_{n+1},\ldots,u_{n+m})_{opt}$.

Für die Lineare Optimierung sind dies die Bedingungen (Vogel [22], S. 93, Formel (2.9))

$$\begin{array}{lll} b - Ax_o \geqslant 0 & u_o \geqslant 0 & u_o'(b - Ax_o) = 0 \\ A'u_o - c \leqslant 0 & x_o \geqslant 0 & x_o'(A'u_o - c) = 0. \end{array} \qquad (5.2)$$

In der Formulierung dieser Arbeit (1.1) - (1.8) vereinfachen sich die Formeln (5.2) zu

$$\left.\begin{array}{l} x_k \geqslant 0 \\ u_k \geqslant 0 \end{array}\right\} (k=1,\ldots,m+n) \quad ; \quad \sum_{k=1}^{m+n} x_k u_k = 0. \qquad (5.3)$$

Beim Simplex-Verfahren sind die Bedingungen (5.3) immer erfüllt bis auf

$$x_{n+i} \geq 0 \quad (i \in I) \qquad \text{und} \qquad u_j \geq 0 \quad (j \in J) \qquad (5.4)$$

Die Bedingungen (5.4) sind aber gleichwertig mit

$$b_i \geq 0 \quad (i \in I) \qquad \text{und} \qquad c_j \leq 0 \quad (j \in J), \qquad (5.5)$$

also den Optimalitätsbedingungen beim Simplex-Verfahren (vgl. z.B. [4 , Kap. 5-1]) .

5.1 Bemerkung

Die Kuhn-Tucker-Bedingungen (5.1) als notwendige und hinreichende Bedingungen für einen Sattelpunkt entsprechen beim Simplex-Verfahren den notwendigen und hinreichenden Optimalitätsbedingungen (5.5).

Der Zusammenhang mit dem Triplex-Verfahren wird nun durch die folgenden Sätze hergestellt.

5.2 Satz

Notwendige und hinreichende Bedingung für den Optimalpunkt ist

$$|\varphi_j| \leq 90^\circ \quad (j \in J) \qquad \text{und}$$
$$|\varphi'_{n+i}| \leq 90^\circ \quad (i \in I), \qquad (5.6)$$

wobei φ_j bzw. φ'_{n+i} primale bzw. duale Triplex-Winkel der optimalen Basisdarstellung sind (vgl. Def. 2.1, 2.3 und 3.1).

Beweis: Für $w = \cos\varphi$ (vgl. Def. 2.4 und 3.2)

ist $|\varphi| \leq 90^\circ \iff w \geq 0.$

Speziell für die Triplex-Koeffizienten w_j $(j \in J)$ und

w'_{n+i} $(i \in I)$ folgt mit den Formeln (2.1) und (3.2)

$$\begin{aligned} |\varphi_j| \leq 90^\circ &\Leftrightarrow c_j \leq 0 \quad (j \in J) \\ |\varphi'_{n+i}| \leq 90^\circ &\Leftrightarrow b_i \geq 0 \quad (i \in I) \end{aligned} \tag{5.7}$$

Dies sind aber gerade die Optimalitätsbedingungen (5.5) des Simplex-Verfahrens.

5.3 Satz

Das primale Triplex-Verfahren zielt ab auf die Erfüllung der Optimalitätsbedingung $c_j \leq 0$ $(j \in J)$;

es ist indifferent bezüglich der Erfüllung der Zulässigkeitsbedingung $b_i \geq 0$ $(i \in I)$.

Beweis:

Variante 1: In "Variante 1" des Triplex-Verfahrens werden die Restriktionen mit den n flachsten Triplex-Winkeln zu NBR bestimmt; unter der Annahme, daß die meisten dieser Winkel betragsmäßig kleiner als 90° sind und sich durch Basistransformationen nicht sehr verändern, wird die p_1-Basis nach Satz 5.2 die Bedingung $c_j \leq 0$ $(j \in J)$ weitgehend erfüllen.

Zum zweiten Teil der Behauptung: Das Kriterium der flachsten (primalen) Triplex-Winkel ist das einzige Kriterium der "Variante 1". Ein Zusammenhang dieses Kriteriums mit der Erfüllung der Zulässigkeitsbedingung $b_i \geq 0$ $(i \in I)$ ist deshalb nicht gegeben, weil die dualen Nichtbasis-Koeffizienten $b_i/|b|$ von den primalen Triplex-Koeffizienten w_k $(k \in I \cup J)$ vollständig unabhängig (koeffizientenfremd) sind.

Variante 2: Die der"Variante 2" zugrundeliegende Form des Kuhn-Tucker-Theorems (vgl. [12]) ist nicht hinreichend: selbst wenn dort n positive Skalare q_j gefunden werden, ist wie bei "Variante 1" über die Zu-

lässigkeit einer so bestimmten Triplex-Basis keine Schlußfolgerungen möglich;
es wird aber die Optimalitätsbedingung $c_j \leq 0 \quad (j \in J)$ erfüllt, falls durch die Basistransformationen keine q_j negativ werden.

5.4 Satz
Das duale Triplex-Verfahren zielt ab auf die Erfüllung der Zulässigkeitsbedingung $b_i \geq 0 \quad (i \in I)$;
es ist indifferent bezüglich der Erfüllung der Optimalitätsbedingung $c_j \leq 0 \quad (j \in J)$.

Beweis: dualer Analogschluß zum Beweis von Satz 5.3.

§ 6 Redundanz und Zulässigkeit

Künzi [10] hat bereits darauf hingewiesen, daß das Duoplex-Verfahren dann keine besonderen Vorteile hat, wenn die flachste BR redundant ist.

In diesem Abschnitt wird dieses Problem für das Triplex-Verfahren konkretisiert; gleichzeitig wird der Zusammenhang mit der Zulässigkeit einer so bestimmten Triplex-Basis beschrieben (bes. Folgerung 6.5).

6.1 Definition

Eine Restriktion $x_k \geq 0 \quad (k \in I \cup J)$ heißt redundant für das Ungleichungssystem (1.4) - (1.5), wenn in jedem zulässigen Punkt für die Variable x_k gilt:

$$x_k > 0.$$

Entsprechend wird die Redundanz im dualen Problem definiert.

(Um sinnvoll von Redundanz sprechen zu können, wird hier und im folgenden die Konsistenz des Problems, d.h. die Existenz einer zulässigen Lösung vorausgesetzt.)

6.2 Bemerkung

Im Gegensatz zu Tschernikow ([21], Kap. II, Def. 2.1) darf bei dieser Definition die redundante Hyperebene $x_k = 0$ den zulässigen Bereich nicht einmal berühren.

6.3 Lemma

Ist eine Restriktion $x_k \geq 0 \quad (k \in I \cup J)$ redundant, so enthält die Hyperebene $x_k = 0$ keinen zulässigen Punkt.

Ist eine NBR redundant, so kann also die Basis - unabhängig von der Verteilung der anderen Variablen - nicht zulässig sein.

Beweis: folgt unmittelbar mit Definition 6.1.

6.4 Lemma

Jede redundante Restriktion muß in jedem zulässigen Basispunkt - also auch im Optimalpunkt - BR sein;

wenn s die Anzahl der redundanten NBR ist, so sind mindestens s Austauschschritte nötig, um eine zulässige Basis zu erreichen.

Beweis: folgt unmittelbar aus Lemma 6.3.

6.5 Folgerung

Sind s ($s > 0$) der n flachsten Restriktionen redundant, so ist die p_1-Basis nicht zulässig;
es sind mindestens s Austauschschritte notwendig, um von der Triplex-Basis aus eine zulässige Basis zu erreichen.

Dual dazu gilt: Sind t ($t > 0$) der m flachsten dualen Restriktionen $u_k \geq 0$ ($k \in I \cup J$) im dualen Problem redundant, so ist die d_1-Basis nicht zulässig;
es sind mindestens t Austauschschritte notwendig, um von der d_1-Basis aus eine dual zulässige Basis - d.h. eine Scheinlösung für das primale Problem - zu erreichen.

6.6 Lemma

Ist von zwei dualen Restriktionen $x_k \geq 0$ und $u_k \geq 0$ ($k \in I \cup J$) eine redundant, so ist die andere nicht redundant; sie ist sogar optimale NBR (d.h. im Optimalpunkt aktiv).

Beweis: Nach Satz 1.1.5 ist in jedem Basispunkt für jedes $k \in I \cup J$ wenigstens $x_k = 0$ oder $u_k = 0$.
Da für redundante Restriktionen $x_k \geq 0$ bzw. $u_k \geq 0$ gilt, ist $u_k = 0$ bzw. $x_k = 0$ in jedem Basispunkt.

Insbesondere gibt es einen Optimalpunkt, für den u_k bzw. x_k duale bzw. primale NBV ist, da für NBV $u_k = 0$ bzw. $x_k = 0$ gilt.

6.7 Bemerkung

Es gibt Verfahren, in denen die Redundanz von Restriktionen exakt geprüft wird (z.B. [21], S. 121 ff).

Andere vereinfachte Kriterien sind denkbar, die Hinweise auf eine mögliche Redundanz liefern können, z.B. eine Prüfung der Zulässigkeit der Normalenfußpunkte der Hyperebenen $x_k = 0$ $(k \in I \cup J)$.

Innerhalb des Triplex-Verfahrens erscheinen solche Zusatz-Kriterien aber als zu aufwendig, zumal auch andere Bedingungen die Zugehörigkeit einer Variablen zur optimalen Basis wesentlich beeinflussen (vgl. §§ 7 - 9).

§ 7 Die Verteilung der Triplex-Koeffizienten

Für Effektivitätsbetrachtungen beim Triplex-Verfahren ist die Häufigkeitsverteilung der Triplex-Koeffizienten $w_k = \cos \varphi_k$ $(k \in I \cup J)$ und damit auch die der Triplex-Winkel φ_k von Belang.

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß bei einer gleichmäßigen Verteilung der Gradientenrichtungen der Restriktionen im R_n eine sehr ungleiche Verteilung der Triplex-Koeffizienten vorliegt (Satz 7.2 - 7.4), die die Effektivität des Triplex-Verfahrens einschränkt. Dies betrifft also auch und gerade die für das Triplex-Verfahren noch als relativ günstig erscheinenden "symmetrisch" angeordneten Probleme (vgl. Beispiel 9.5). Einige Modifikationen des Triplex-Verfahrens in § 12 und § 13 sollen den hier dargestellten Schwierigkeiten begegnen.

Bei LP-Problemen sind für eine "gleichmäßige" Verteilung der Gradientenrichtungen g der Restriktionen im R_n zwei unterschiedliche sinnvolle Annahmen möglich:
Für $g = \{g_\nu | \nu=1,\dots,n\}$, $g_\nu = \cos \omega_\nu$ mit der zusätzlichen Normierung $|g| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \cos^2 \omega_\nu} = 1$ gilt

(7.1) Die Raumwinkel $\omega = \{\omega_\nu | \nu=1,\dots,n\}$ sind gleichverteilt, d.h. alle ω_ν sind gleichverteilt im Intervall $[-\pi,\pi]$.

(7.2) Die Komponenten $\{g_\nu | \nu=1,\dots,n\}$ sind gleichverteilt im Intervall $[-1,1]$.

7.1 Bemerkung
Die Verteilung (7.1) entspricht einer räumlichen Gleichverteilung der Winkel; die Verteilung (7.2) entspricht dagegen besser als (7.1) den Testbeispielen bei Künzi/Kleibohm [12], wo von einer Gleich-

verteilung der c_j und a_{ij} im Intervall $[-1,1]$ ausgegangen wurde, und ebenfalls den zufallsgenerierten Testprogrammen dieser Arbeit.

Allgemein stellt sich nun das folgende Problem:
Sei c ein beliebiger fester Vektor im R_n. ω sei ein Raumwinkel, dessen Verteilung im R_n vorgegeben ist durch (7.1) oder (7.2).
Gesucht werden zu $\varphi = \sphericalangle(c,\omega)$ und $w = \cos\varphi$ die Verteilungsfunktionen $p_n(\varphi)$ und $\bar{p}_n(w)$ sowie die zugehörigen Dichtefunktionen $\bar{p}_n'(\varphi)$ und $\bar{p}_n'(w)$.
(Für Definition und Zusammenhang der statistischen Begriffe siehe z.B. Fisz [6], S. 29-34).

Die Verteilungsfunktion $p_n(\varphi)$ ist definitionsgemäß gleich der Wahrscheinlichkeit eines Triplex-Winkels ϑ ($\vartheta \leq \varphi$). Im Falle (7.1), der zunächst betrachtet werden soll, ist diese

$$p_n(\varphi) = \frac{S_n(\varphi)}{I_n} \quad , \tag{7.3}$$

wobei I_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel und S_n das Volumen eines daraus ausgeschnittenen Kugelsektors mit dem Öffnungswinkel φ ($0 \leq |\varphi| \leq \pi$) ist.

I_n ist berechnet in Erwe [5, S. 126 ff]; Die Berechnung von $S_n(\varphi)$ wird daran angelehnt.

Der Durchschnitt einer festen Hyperebene

$$x_n = \cos\vartheta \quad (0 \leq |\vartheta| \leq \pi)$$

mit der n-dimensionalen Einheitskugel

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 1 \qquad \text{ist}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} x_j^2 = 1 - \cos^2\vartheta \quad ,$$

also eine (n-1)-dimensionale Einheitskugel mit dem Radius $\sin\vartheta$ und dem Volumen $I_{n-1}\cdot\sin^{n-1}\vartheta$.

Der Durchschnitt speziell mit $x_n = \cos\varphi$ teilt $S_n(\varphi)$ in einen Kegel $K_n(\varphi)$ und einen Abschnitt $A_n(\varphi)$. Dabei ist gemäß [5 , Formel (127)]

$$|K_n(\varphi)| = \frac{1}{n} I_{n-1} \sin^{n-1}\varphi \cos\varphi \, .$$

Für $A_n(\varphi)$ gilt mit der Substitution $x_n = \cos\vartheta$, $dx_n = -\sin\vartheta d\vartheta$:

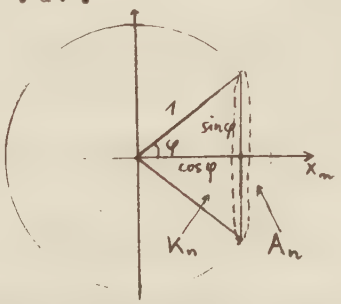
$$|A_n(\varphi)| = I_{n-1} \int_{x_n=\cos\varphi}^{1} \sin^{n-1}\vartheta \, d\vartheta = I_{n-1} \int_{\vartheta=0}^{\varphi} \sin^n\vartheta d\vartheta =$$

$$= \left(-\frac{\sin^{n-1}\varphi \cos\varphi}{n} + \frac{n-1}{n} \int_0^{\varphi} \sin^{n-2}\vartheta \, d\vartheta\right) I_{n-1} \, ,$$

so daß sich $S_n = |K_n| + |A_n|$ vereinfacht zu

$$S_n(\varphi) = I_{n-1} \frac{n-1}{n} \int_0^{\varphi} \sin^{n-2}\vartheta \, d\vartheta \, .$$

Die nebenstehende Skizze erläutert diese Berechnung.



Daher ist die Verteilungsfunktion der Triplex-Winkel

$$p_n(\varphi) = \frac{n-1}{n} \frac{I_{n-1}}{I_n} \int_0^{\varphi} \sin^{n-2}\vartheta \, d\vartheta \qquad (7.5)$$

und die Dichtefunktion

$$p'_n(\varphi) = \frac{n-1}{n} \frac{I_{n-1}}{I_n} \sin^{n-2}\varphi \,. \qquad (7.6)$$

Die Konstante bestimmt man entweder mit Erwe [5,(133)] oder aus der Bedingung $p_n(\pi) = 1$ (mit z.B. Bartsch [2, 6.57 Formel 20-21)] zu (7.7)

$$\frac{n-1}{n} \frac{I_{n-1}}{I_n} = \int_0^{\pi} \sin^{n-2}\vartheta \, d\vartheta = \begin{cases} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n-2)} \dfrac{\pi}{2} & \text{(n gerade)} \\ \dfrac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n-2)}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} & \text{(n ungerade)} \end{cases}$$

Für die Verteilung der Triplex-Koeffizienten $w = \cos\varphi$ gilt

$$\frac{dw}{dp_n} = \left| \frac{dw}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dp_n} \right| = \sin\varphi \cdot \frac{1}{\text{const.} \sin^{n-2}\varphi} \,, \text{ also}$$

$$\frac{dp_n}{dw} = \text{const.} \sin^{n-3}\varphi \,. \qquad (7.8)$$

Damit ist folgender Satz bewiesen.

7.2 Satz

Die Gradientenrichtungen der Restriktionen eines LP-Problems seien gleichverteilt im R_n (also wie in (7.1)). Dann gilt:

1. Die Verteilung $p_n(\varphi)$ der Triplex-Winkel φ hat die Dichte

$$dp_n(\varphi) = \text{const.} \sin^{n-2}\varphi \, d\varphi, \qquad (7.9)$$

wobei die Konstante durch (7.7) gegeben ist.

2. Die Verteilung $\bar{p}_n(w)$ der Triplex-Koeffizienten $w = \cos\varphi$ hat die Dichte (7.10)

$$d\bar{p}_n(w) = \text{const.} \cdot \sin^{n-3}\varphi \cdot dw = \text{const.} \cdot (1-w^2)^{\frac{n-3}{2}} \cdot dw,$$

wobei die Kostante durch $\bar{p}_n(\varphi=\pi) = 1$ gegeben ist.

7.3 Satz

Die Gradientenrichtungen der Restriktionen eines LP-Problems seien verteilt nach (7.2), d.h. ihre Komponenten g_v $(v=1,\ldots,n)$ seien gleichverteilt in $[-1,1]$. Dann gilt:
Die Dichten von Triplex-Koeffizienten und Triplex-Winkeln sind noch größer bei $\varphi = 90^\circ$ als die entsprechenden Dichten für (7.1) in Satz 7.2.

Beweis: Gegenüber den ursprünglichen Verteilungen (7.1)

$$\frac{df_v}{d\omega_v} = \text{const.} \quad \text{gilt bei (7.2)} \quad \frac{d\bar{f}_v}{dg_v} = \text{const.} \quad (v=1,\ldots,n)$$

Mit $g_v = \cos\omega_v$ folgt

$$\bar{f}_v'(\omega_v) = \text{const.} \cdot \bar{f}_v'(g_v) \cdot g_v'(\omega_v) = \text{const.} \sin(\omega_v),$$

d.h. gegenüber den ursprünglichen Verteilungen der ω_v ist eine Gewichtung mit $\sin\omega_v$ eingetreten. Diese führt wegen $\varphi = \sphericalangle(c,\omega) = \sphericalangle(c,\{\omega_v\})$ zu einer stärkeren Gewichtung auch von $\bar{p}_n'(\varphi)$ und $\bar{p}_n(w)$ bei $\varphi = 90^\circ$.

7.4 Korrollar

Bei einer Verteilung der dualen Restriktionen im R_m entsprechend zu (7.1) und (7.2) gelten für das duale Problem die Sätze 7.2 und 7.3 im R_m.

7.5 Beispiele

Die starke Häufung der Triplexkoeffizienten w bei wachsendem n bei $w = 0$ wird mit Beispielen belegt.

Bei Gleichverteilung der Raumwinkel der Gradienten im R_n nach (7.1) sind für n = 6; 8; 10 die Anteile der Triplex-Winkel im Bereich $90^\circ +/- \psi$ für $90^\circ - |\psi| \doteq 45^\circ; 60^\circ; 75^\circ; 84{,}27^\circ$, also die der Triplex-Koeffizienten w für $w \leq 0{,}71; 0{,}50; 0{,}26; 0{,}10$ nach Formel (7.5) in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Tabelle (7.11):

$\lvert\psi\rvert \leq$ \ n:	6	8	10	$\lvert w\rvert \leq$
45°	96,4 %	98,8 %	99,5 %	0,707
30°	87,8 %	93,6 %	96,2 %	0,500
15°	72,2 %	81,5 %	86,8 %	0,259
$5{,}73^\circ$ ($\varphi = 90^\circ \pm \psi$)	59 %	70,0 %	76,5 %	0,100

7.6 Folgerungen

1. Für LP-Probleme mit großem n ist der Aussagewert eines großen Teils der Triplex-Koeffizienten w über die Zugehörigkeit der entsprechenden Variablen zur optimalen Basis relativ gering, da die meisten Restriktionen weder ausgesprochen "flach" noch "steil" sind, sondern zumeist im mittleren Bereich bei 90° liegen.

2. Die Zuordnungsgrenze $\text{Rang}(w_k) = n$ zu BV und NBV liegt zumeist im Häufungsbereich der w_k $(k \in I \cup J)$, wo nur sehr geringe Winkelunterschiede ausschlaggebend sind.

3. Da neben den Triplex-Winkeln noch einige relativ grobe Kriterien über die Zugehörigkeit zur optimalen Basis mitentscheiden (vgl. §§ 5,6,8,9), ist eine stärkere Verwendung der Restriktionen außerhalb des Häufungsbereiches zu erwägen (vgl. §§ 11, 12 und 19).

§ 8 Verzerrung der Winkel bei Variablen-Transformation

Eine Multiplikation einer Zeile oder Spalte eines LP-Problems mit einem Faktor $k \in R$ (das entspricht einer Transformation einer BV oder NBV von $x \rightarrow k \cdot x$) verändert die optimale Basis nicht.

Einer solchen Transformation entspricht aber geometrisch eine Änderung der dualen (bei Zeilentransformation) oder primalen (bei Spaltentransformation) Achsenmaßstäbe, d.h. eine Verzerrung der dualen bzw. primalen Winkel und damit auch eine willkürliche Gewichtung der dualen bzw. primalen Triplex-Koeffizienten. Quantitativ gilt:

8.1 Satz

Werden bei einem LP-Problem die Koeffizienten einer Spalte j_o $(j_o \in J)$ mit einem Faktor k multipliziert, so ändert sich das Verhältnis

$$w_{j_o}/w_j \quad (j \neq j_o,\ j \in J) \tag{8.1}$$

der primalen Triplex-Nichtbasis-Koeffizienten ebenfalls um den Faktor k.
Die dualen Basis-Koeffizienten w'_j $(j \in J)$ bleiben unverändert.

Beweis: Mit $c_{j_o} \longrightarrow \bar{c}_{j_o}$ und $|c| \rightarrow |\bar{c}|$ folgt

$$-w_j = \frac{c_j}{|c|} \rightarrow \begin{cases} \frac{k \cdot c_j}{|\bar{c}|} & (j = j_o) \\ \frac{c_j}{|\bar{c}|} & (j \neq j_o) \end{cases} \qquad (j \in J)$$

und daraus $\bar{w}_{j_o}/\bar{w}_j = k \cdot w_{j_o}/w_j \quad (j \neq j_o)$.

Beim dualen Koeffizienten w'_{j_o} $(j \in J)$ läßt sich der Faktor k herauskürzen, wie man leicht verifiziert.

Analog hierzu beweist man den dualen Satz:

8.2 Satz

Werden bei einem LP-Problem die Koeffizienten einer Zeile i_o $(i \in I)$ mit einem Faktor k multipliziert, so ändert sich das Verhältnis

$$w'_{i_o} / w'_i \quad (i \neq i_o,\ i \in I) \tag{8.2}$$

der dualen Triplex-Nichtbasis-Koeffizienten ebenfalls um den Faktor k.

Die primalen Basis-Koeffizienten w_i $(i \in I)$ bleiben unverändert.

8.3 Beispiel

Die starke Auswirkung einer Variablentransformation auf die Auswahl der Triplex-Basis zeigt das folgende Beispiel:

Sei $n = 25$; $c_j = -0{,}2$ $(j=1,\ldots,n)$

sowie $x_1 \longrightarrow 10 \cdot x_1$ gegeben.

Aus $w_j = -c_j / |c| = +0{,}2$ $(j=1,\ldots,n)$,

d.h. Gleichbewertung aller Restriktionen durch die p-Basis, wird mit $\bar{c}_1 = -2$ und $|\bar{c}| \approx 5$

$$\bar{w}_j \approx \begin{cases} 0{,}895 & (\varphi_j \approx 26{,}5^o) \qquad (j=1) \\ 0{,}09 & (\varphi_j \approx 84{,}3^o) \qquad (j \in J,\ j \neq 1). \end{cases}$$

Legt man der besseren Anschauung wegen für die Basis-Winkel des Problems eine Verteilung nach (7.1) zugrunde, so verhalten sich dort die Wahrscheinlichkeiten dieser beiden Winkel mit (7.6) wie

$$\frac{\sin^{23}(26{,}5^o)}{\sin^{23}(84{,}3^o)} \approx \left(\frac{0{,}445}{0{,}995}\right)^{23} < \frac{1}{2^{23}} \approx 0{,}0001\ \%.$$

Der ursprünglich durchschnittliche Koeffizient w_1 erhält also nach der Transformation mit großem Abstand den $\mathrm{Rang}(w_k,\ k \in I \cup J) = 1$.

8.4 Bemerkung

Gegen diese Schwierigkeiten (Überwiegen einzelner Zeilen- oder Spalten-Koeffizienten) hilft eine Normierung, wie sie in § 11 beschrieben ist.

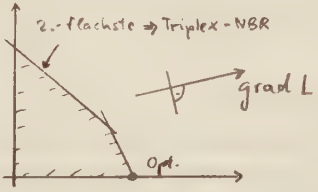
§ 9 Beispiele: Ungünstige Fälle des Triplex-Verfahrens

In den Arbeiten über das Duoplex-Verfahren ([10],[14]) wurde bereits darauf hingewiesen, daß dieses gegenüber der einfachen Simplex-Methode dann keine Vorteile hat, wenn die im ersten Teil ausgewählte BR redundant ist; für $n > 2$ braucht die flachste Restriktion aber selbst dann nicht im Optimalpunkt aktiv zu sein, wenn sie nicht redundant ist (vgl. Beispiel von Beale am Ende von [14]).

9.1 Dies gilt natürlich auch für das Triplex-Verfahren, und dort erst recht für die $n-1$ übrigen Triplex-NBR.

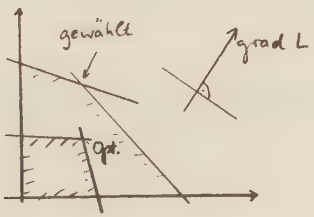
9.2 Beispiel

Sogar schon für $n > 1$ braucht eine nicht-redundante Triplex-NBR nicht im Optimalpunkt aktiv zu sein, wie die nebenstehende Skizze zeigt.



Es folgen zwei Beispiele, die das Versagen des Triplex-Verfahrens beim Auftauchen flacher redundanter Restriktionen illustrieren. In beiden Fällen wird die Triplex-Basis vollständig falsch bestimmt; bei 9.4 ist die Ausgangsbasis sogar bereits optimal.
Es ist leicht zu verifizieren, daß in der Triplex-Basis von 9.3 und 9.4 sämtliche Zulässigkeitsbedingungen verletzt sind, ebenso, daß Variante 1 und 2 gleichermaßen versagen.

9.3 Beispiel



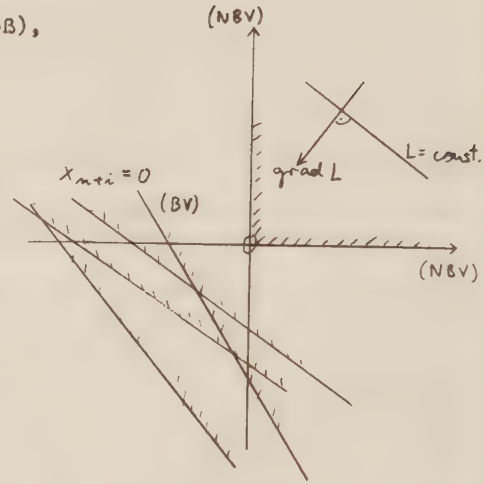
9.4 Beispiel

Sei $c_j \leq 0 \quad (j \in J)$
(etwa alle gleich groß),

$b_i \geq 0 \quad (i \in I)$
(beliebig),

$a_{ij} \approx c_j \quad (i \in I, j \in J)$
(fast lin. abhängig).

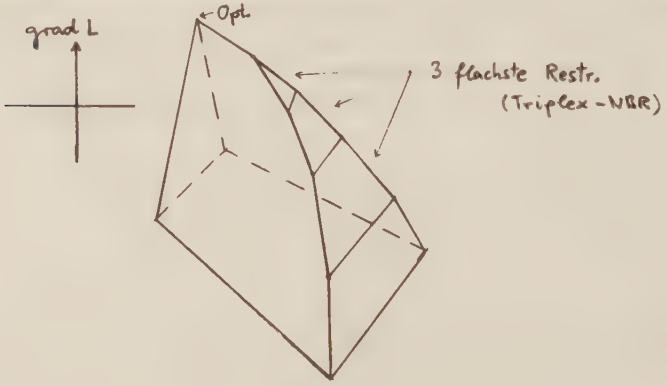
Dann ist
$w_{n+i} \approx 1 \quad (i \in I)$
$w_j \geq 0;\ w_j < w_{n+i}$
$(i \in I,\ j \in J)$;
daher: Wahl der BR
als Triplex-NBR.



9.5 Beispiel

Dieses Beispiel soll illustrieren, daß es sich ungünstig auswirkt, wenn die Restriktionen unsymmetrisch bezüglich grad L = c verteilt sind.

Die Skizze für $n = 3$ zeigt:
Für $n > 2$ braucht keine der n flachsten Restriktionen im Optimalpunkt aktiv zu sein, selbst dann, wenn keine Restriktion redundant ist.



Kapitel III: Primal-duale Triplex-Verfahren

§ 10 Die pd-Basis

Die Formulierung des Problems im § 1 macht es leicht und legt es nahe, aus den p-Koeffizienten (vgl. 2.4 - 2.5) und den d-Koeffizienten (vgl. 3.2 - 3.3) eine kombinierte Triplex-Basis zu bilden.

Ein Motiv dafür bieten vor allem die Sätze im § 5: Da die p-Basis indifferent ist bezüglich der Zulässigkeit und günstig für eine Scheinlösung, die d-Basis aber umgekehrt, müßten bei einer aus beiden kombinierten Triplex-Basis beide Optimalitätskriterien weitgehend erfüllt sein (Beweise hierzu befinden sich im Kapitel IV).

Da die kleinsten w_k, aber die größten w'_k eine Triplex-Basis bestimmen $(k \in I \cup J)$, liegen folgende Definitionen nahe:

10.1 Definition
Die primal-dualen Triplex-Koeffizienten (kurz: pd-Koeffizienten) sind

$$W_j := w_j - w'_j = -\frac{c_j}{|c|} - \frac{b \cdot a_j}{|b||a_j|} \quad (j \in J) \tag{10.1}$$

$$W_{n+i} := w_{n+i} - w'_{n+i} = \frac{a_i \cdot c}{|a_i||c|} - \frac{b_i}{|b|} \quad (i=1,..,m) \tag{10.2}$$

wobei w_k $(k \in I \cup J)$ die primalen und w'_k $(k \in I \cup J)$ die dualen Triplex-Koeffizienten sind.

10.2 Definition
Eine primal-duale Triplex-Basis (kurz: pd-Basis) ist eine unter Verwendung von p-Winkeln und d-Winkeln bestimmte Basis eines LP-Problems.

10.3 Definition
Die p_1d_1-Basis ist die Index-Menge

$$I_{pd} := \{k | k \in I \cup J, \quad \text{Rang}((W_k) > n\}, \qquad (10.3)$$

wobei W_k $(k \in I \cup J)$ die pd-Koeffizienten (10.1) - 10.2) sind.

10.4 Bemerkung
Die p_1d_1-Basis ist auch bestimmt durch

$$J_{pd} := \{k | k \in I \cup J, \quad \text{Rang}(W_k) \leq n\}$$

als $I_{pd} = (I \cup J) \setminus J_{pd}$.

10.5 Bemerkung
Aus verschiedenen p- und d-Basen lassen sich i.a. verschiedene pd-Basen bilden; weitere pd-Basen, die wiederum untereinander kombinierbar sind, werden in 10.6, in 10.8 und in § 13 definiert.
Mit "der" pd-Basis ist im folgenden immer die p_1d_1-Basis gemeint.

10.6 Definition
Die p_2d_2-Basis ist die Basis, die entsteht, wenn man bei "Variante II" des Triplex-Verfahrens (s. § 2) in Reihenfolge der W_k statt der w_k $(k \in I \cup J)$ vorgeht.

10.7 Bemerkung
Ein Vorteil dieser Modifikation der "Variante II" dürfte sein, daß durch eine günstigere Auswahl der ersten r Restriktionen auch die Richtung des Restvektors a_r günstiger ist, so daß mehr der noch fehlenden Restriktionen richtig ausgewählt werden können. Nach § 5 ist weiter anzunehmen, daß die Triplex-Basis gegenüber der ursprünglichen "Variante II" weniger unzulässig ist.

10.8 Definition

Die pd-Basis nach Rangfolge ist die Indexmenge

$$I^{r}_{pd} := \{k \mid \mathrm{Rang}(\mathrm{Rang}(w_k) + \mathrm{Rang}(w'_k)) > n,\ k \in I \cup J\}.$$

10.9 Bemerkung

Ein Vorteil der pd-Basis nach Rangfolge ist, daß vereinfachte Koeffizienten verwendet werden können nach Bemerkung 2.12 und 3.7 (vgl. hierzu auch die Tabellen (16.1) und (16.2)).

Von Nachteil mag sein, daß die Information über die Abstände zwischen aufeinanderfolgenden Triplex-Koeffizienten verlorengeht.

§ 11 Normierte Triplex-Basen

In § 8 wurde gezeigt, daß die Effektivität des Triplex-Verfahrens bei Problemen mit Verzerrungen eingeschränkt ist. - Umgekehrt dürfte eine Normierung der Zeilen- bzw. Spaltenvektoren auf $\|a_i\| = 1$ bzw. $\|a_j\| = 1$, d.h. eine "Entzerrung" aller Triplex-Winkel, zu einer Effektivitätssteigerung führen.

Nach Satz 8.1 - 8.2 ist dabei für die Berechnung der w_j und w'_j eine Normierung der Spalten und für die der w_{n+i} und w'_{n+i} eine Normierung der Zeilen zugrundezulegen.

Als Norm bietet sich die euklidische Vektornorm

$$\|a_i\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} \quad (i \in I) \qquad \text{bzw.} \qquad \|a_j\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^2} \quad (j \in J) \qquad \text{an,}$$

da die a_{ij}^2 ohnehin berechnet werden müssen.

Eine einfache ebenfalls mögliche Norm wäre

$$\|a_i\| = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{bzw.} \qquad \|a_j\| = \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| .$$

Im ersten Fall ergeben sich folgende Definitionen für die normierten Triplex-Koeffizienten:

11.1 Definition

Die normierten p-Koeffizienten sind

$$\bar{w}_j = \frac{-c_j}{|c|\,|a_j|} \quad (j \in J)$$

$$\bar{w}_{n+i} = \frac{\bar{a}_i\,\bar{c}}{|\bar{a}_i|\,|\bar{c}|} \quad (i \in I) \qquad \text{mit} \qquad \begin{cases} \bar{c} = \left\{ \left| \frac{c_j}{a_j} \right| \,\middle|\, j \in J \right\} \\ \bar{a}_i = \left\{ \left| \frac{a_{ij}}{a_j} \right| \,\middle|\, j \in J \right\} \quad (i \in I) \end{cases}$$

11.2 Definition

Die normierten d-Koeffizienten sind

$$\bar{w}'_j := \frac{\bar{a}_j \bar{b}}{|\bar{a}_j||\bar{b}|} \quad (j \in J) \quad \text{mit} \begin{cases} \bar{a}_j := \left\{ \frac{a_{ij}}{|a_i|} \mid i \in I \right\} & (j \in J) \\ \bar{b} := \left\{ \frac{b_i}{|a_i|} \mid i \in I \right\} \end{cases}$$

$$\bar{w}'_{n+i} := \frac{b_i}{|b||a_i|} \quad (i=1,\ldots,m+n)$$

11.3 Definition

Die normierten pd-Koeffizienten sind

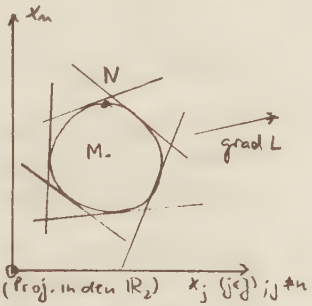
$$\bar{\bar{w}}_k := \bar{w}_k - \bar{w}'_k \quad (k \in I \cup J).$$

11.4 Bemerkung/Definition

Die normierte p-, d- und pd- Triplex-Basis in den verschiedenen Spielarten wird völlig analog mit den normierten Triplex-Koeffizienten gebildet.

11.5 Beispiel

Das folgende Beispiel soll den Einfluß von Verzerrung und Normierung veranschaulichen.



Sind die Gradientenrichtungen der Restriktionen gleichverteilt wie in (7.1) und außerdem die Gradienten von einem Kugelmittelpunkt gleich weit entfernt, so wird bei einer starken Strekkung in Richtung x_n die Kugel zu einem Ellipsoid verformt, und c erhält etwa die Richtung der x_n-Achse. Statt der ursprünglich sehr gut ausgewählten Restriktionen werden nun solche in der Nähe des "Nordpols"der Kugel ausgewählt.- Durch eine Normierung wird dieser Fehler wieder korrigiert.

§ 12 AT-Koeffizienten

In § 7 wurde gezeigt, daß es sinnvoll sein kann, nur einen Teil der - primalen und dualen - Triplex-Koeffizienten für das Triplex-Verfahren auszuwerten. In diesem Abschnitt werden solche Varianten des Triplex-Verfahrens in sinnvoller Weise dargestellt.

Prinzipiell werden bei diesem Vorgehen nacheinander die NBV mit den größten Triplex-Winkeln gegen die BV mit den kleinsten Triplex-Winkeln ausgetauscht, wobei

a) die nach einer vorgegebenen Grenze des Austauschs erreichte Basis als modifizierte Triplex-Basis angesehen wird, oder

b) die Triplex-Koeffizienten in der Form 12.1 ohne eine spezielle Triplex-Basis als Austausch-Kriterium dienen (als "Variante des Simplex-Verfahrens"im Sinne von Dantzig [4], Kap. 11).

12.1 Definition

Sind W_k $(k \in I \cup J)$ Triplex-Koeffizienten, so sind

$$A_k := \begin{cases} W_i & (i \in I) \\ -W_j & (j \notin J) \end{cases} \qquad (k \in I \cup J) \qquad (12.1)$$

die AT-Koeffizienten ("Austausch-Koeff."). Diese Definition gilt in entsprechender Weise für p-, d- und pd-Koeffizienten.

12.2 Bemerkung

Waren die Triplex-Koeffizienten heuristisch zu verstehen als Grad der Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Restriktion optimale NBR ist, so die AT-Koeffizienten dafür, daß eine Restriktion beim Übergang zur optimalen Basis ausgetauscht werden muß.

Das pd-Triplex-Verfahren mit AT-Koeffizienten

Variante 1: (entspricht der p_1d_1-Basis)

Schritt 1: Bilde $\mathrm{Rang}(A_i,\ i \in I)$ und

$\mathrm{Rang}(A_j,\ j \in J)$.

Schritt 2: Es erfolgen AT-Schritte der Indizes i_r mit $\mathrm{Rang}(A_i) = 1; 2; \ldots r_o$ gegen Indizes j_r mit $\mathrm{Rang}(A_j) = 1; 2; \ldots r_o$;

dabei ist r_o die Anzahl der Iterationen und ergibt sich aus einer der folgenden Bedingungen nach - empirischer - Festlegung der Konstanten G_1 und G_2:

1. $r_o < \min(m,n)/G_1 \qquad (G_1 \geq 1)$
2. $A_{i_r} + A_{j_r} > G_2 \qquad (G_2 \leq 4)$
3. $\min(A_{i_r}, A_{j_r}) > 0$.

Schritt 3:

entweder: Fortsetzung wie bei anderen Triplex-Varianten (vgl. § 14)

oder: zunächst Rückkehr zu Schritt 1 mit Bildung von $A_k^{(r)}$ $(k \in I \cup J)$.

Variante 2: (entspricht der "pd-Basis nach Rangfolge")

Schritt 1:

Bilde $\bar{I}_p := \mathrm{Rang}(a_i c,\ i \in I) \qquad \bar{I}_d := \mathrm{Rang}(-b_i,\ i \in I)$

$\bar{J}_p := \mathrm{Rang}(c_j,\ j \in J) \qquad \bar{J}_d := \mathrm{Rang}(b a_j,\ j \in J)$

$\mathrm{Rang}(\bar{A}_i) := \mathrm{Rang}(\bar{I}_p + \bar{I}_d)$

$\mathrm{Rang}(\bar{A}_j) := \mathrm{Rang}(\bar{J}_p + \bar{J}_d)$

Schritt 2:
Wie bei Variante 1, jedoch nur mit Bedingung 1.

Schritt 3: Wie bei Variante 1.

§ 13 Triplex-Verfahren mit Suboptimierung

Unter "Suboptimierung" versteht man die Optimierung einer (rechteckigen) Teilmatrix des Ausgangsproblems ohne Berücksichtigung der übrigen Bedingungen; dies entspricht geometrisch einem Kantenzug im Linearen Unterraum bis zum - beschränkten - Optimum des Unter-Simplex (z.B. längs einer Begrenzungsfläche eines 3-dim. Problems).

Besonders zweckmäßig ist die Suboptimierung bei Unabhängigkeit einzelner Teilprobleme voneinander ("Dekompositions-Verfahren", z.B. [13], Kap. IV). Aber auch bei gewöhnlichen Problemstellungen ist Suboptimierung nicht ohne Erfolg angewendet worden (z.B. [24]); in diesem Fall ist es besonders günstig, wenn der gewählte Unterraum den Optimalpunkt bereits enthält - bei Simplex-Verfahren also dann, wenn die übrigen Restriktionen bereits optimal sind.

Beim Triplex-Verfahren sind die Indizes mit den größten und kleinsten Triplex-Koeffizienten relativ sicher den optimalen NBI Bzw. BI zuzuordnen; nach den vorausgegangenen Erläuterungen bietet sich also für den mittleren Bereich mit $\{k \mid |w_k| \leq G\}$ eine Suboptimierung an. Für die pd-Koeffizienten ergibt sich das folgende Verfahren.

Das pd-Triplex-Verfahren mit Suboptimierung

Schritt 1 und 2: wie beim "pd-Triplex-Verfahren mit AT-Koeff." (§ 12), Variante 1 oder 2

Schritt 3: Optimierung des Teilproblems mit den Indizes, für die gilt:

Variante 1: $|A_k| \leq G_3 \quad (k \in I \cup J)$

$$\text{Variante 2:} \begin{cases} |\text{Rang}(\bar{A}_i) - m| \leq m/G_4 & (i \in I) \\ |\text{Rang}(\bar{A}_j) - n| \leq n/G_4 & (j \in J) \end{cases}$$

Für die Konstanten dürften günstige Werte bei $G_3 = 1$ und bei $G_4 = 3$ liegen.
Anmerkung: Für die Suboptimierung bietet sich die "Produktform der Inversen" oder die "symmetrisch revidierte Simplex-Methode" an, wobei nach Erreichen des beschränkten Optimums eine Reinversion durchgeführt werden kann. (vgl. [13]).

Schritt 4: falls das Gesamtproblem noch nicht optimal ist, Fortsetzung nach einer Variante des Simplex-Verfahrens.

§ 14 Das vollständige Verfahren

Für den ersten Teil des Triplex-Verfahrens, in dem eine Triplex-Basis als "Ausgangsbasis" bestimmt wird, sind in dieser Arbeit eine Reihe von Varianten vorgeschlagen worden, aus denen sich mühelos noch weitere bilden lassen.

Das weitere Verfahren besteht aus dem Übergang zur Triplex-Basis sowie der weiteren Optimierung nach einer anderen Simplex-Variante.

Für den Übergang zur Triplex-Basis ist zunächst ein zusätzlicher Rechenaufwand erforderlich.
Künzi/Kleibohm [12] haben darauf hingewiesen, daß bei Anwendung der "Produktform der Inversen" dieser Rechenaufwand (für die r-te Iteration ca. r·m Multiplikationen) durch den möglichen Wegfall einer Reinversion leicht wieder eingespart werden kann.
Ein ähnlich geeignetes Verfahren ist die "symmetrische revidierte Simplex-Methode" von Müller-Merbach (z.B. [13], Kap. II.4). Der Rechenaufwand für eine Iteration ist zunächst etwas höher (ca. r·(m+n) Multiplikationen) , kann aber später teilweise wieder eingespart werden. Für dabei durchzuführende Reinversionen gilt dasselbe wie bei der Produktform der Inversen.
Sehr wesentlich ist, daß sich beide Simplex-Varianten sehr gut für die Anwendung von Suboptimierung eignen, die besonders beim nicht vollständigen Übergang zur Triplex-Basis (s. § 13) weiteren Rechenaufwand einsparen kann.

Von der Triplex-Basis aus wird das Verfahren nach einer beliebigen Simplex-Variante bis zum Erreichen des Optimalpunktes fortgesetzt; es könnte auch das Triplex-Verfahren erneut angewendet werden, da sich die Winkel ja geändert haben.

Für den Austausch wird im letzten Teil das bisher verwendete Verfahren (Produktform der Inversen oder Symmetrische Revidierte Simplex-Methode) weiter angewendet.
Als AT-Kriterium ist mit dem pd-Triplex-Verfahren ein primal-duales Kriterium sinnvoll, etwa nach [20].

§ 15 Anwendung auf LP-Probleme mit Gleichungen

Das geometrische Modell des Triplex-Verfahrens läßt sich nicht unmittelbar anwenden auf LP-Probleme, die Gleichungen enthalten:
Man kann Gleichungen weder einfach wie Ungleichungen behandeln, da sie unabhängig von der Richtung ihrer Gradienten immer im Optimalpunkt aktiv sind, noch einfach unberücksichtigt lassen, da sie als zusätzliche Nebenbedingungen den Optimalpunkt des Ungleichungssystems erheblich verändern können.

Ein sinnvoller Weg, auf solche Probleme das Triplex-Verfahren anzuwenden, ist die - vorherige - Elimination der Gleichungen. Dies entspricht der Umwandlung in ein kanonisches System (vgl. Dantzig [4], Kap. 4-2) und wird technisch besonders einfach mit der M-Methode durchgeführt (z.B. Judin/Golstein [8], Kap. VII, § 6), weil dann - nach Einfügung hoher negativer Konstanten in die Gleichungen - das Simplex-Verfahren selbst die notwendigen Schritte veranlaßt.
Wesentlich ist dabei, daß bis zur Anwendbarkeit des Triplex-Verfahrens nur dieselben Schritte erforderlich sind, die auch beim Simplex-Verfahren durchgeführt werden müssen.

Das Verfahren wird im folgenden kurz beschrieben:

Gegeben sei das Problem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i=1,\ldots,m_1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \quad (i=m_1+1,\ldots,m_1+m_2=m)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1,\ldots,n)$$

$$\text{Max.} \quad L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ .$$

Es werden Schlupfvariable $x_{n+1},\ldots,x_{n+m}$ eingeführt, wobei

$$x_{n+i} = - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i = 0 \quad (i=1,\ldots,m_1)$$

$$x_{n+i} = - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i \geq 0 \quad (i=m_1+1,\ldots,m_1+m_2=m).$$

Wegen der Bedingung $x_{n+i} = 0 \quad (i=1,\ldots,m_1)$ sind diese Variablen in einer optimalen Basisdarstellung NBV; nach dem Austausch können die entsprechenden Spalten aus dem gleichen Grund weggelassen werden.

Es ergibt sich also:

Schritt 1:

Die BV $x_{n+i} \quad (i=1,\ldots,m_1)$ werden ausgetauscht gegen NBV, die z.B. nach dem üblichen Simplex-Kriterium

$$\max(-c_j \mid c_j > 0, \ j \in J)$$

ausgewählt werden.
Die Spalten $n+1,\ldots,n+m_1$ entfallen nach dem Austausch; diese Koeffizienten brauchen also nicht berechnet zu werden.

Schritt 2:

Auf das verkleinerte Problem wird eins der Triplex-Verfahren angewandt, da die Gleichungen entfallen sind.

§ 16 Vergleich des Rechenaufwandes

Für einen Vergleich des Rechenaufwandes zur Bestimmung der Triplex-Basen sind zunächst in Tabelle (16.1) die verschiedenen Triplex-Koeffizienten aus §§ 2, 3, 10, 11 und 12 zusammengestellt; daraus ergibt sich als grobe Abschätzung für die dafür notwendigen Multiplikationen die Tabelle (16.2).

Der Rechenaufwand für die Verfahren mit AT-Koeffizienten (§ 12), besonders dabei "Variante 2", ist dabei deutlich am geringsten; bei ihnen ist auch die Sortierung einfacher, da kürzere Listen zu sortieren sind, und diese auch nicht vollständig.
Für die "pd-Basis nach Rangfolge" (Def. 10.8) ist etwa der selbe Rechenaufwand notwendig wie für die p_1- und die d_1-Basis.
Bemerkenswert ist außerdem, daß für die p_1d_1-Basis nicht der doppelte Rechenaufwand erforderlich ist wie für die p_1- und d_1-Basis.

Bei den relativ aufwendigen Verfahren mit normierten Koeffizienten ist eine geschickte Abwandlung möglich:

Es wird die Betragssumme der Zeilen- und Spalten-Koeffizienten gebildet; bei stark abweichenden Summen werden die entsprechenden Zeilen oder Spalten normiert (mit dieser Norm).
In diesem Fall liegt der Rechenaufwand in der selben Größenordnung wie bei den nicht normierten Triplex-Basen.

Eine zusätzliche Vereinfachung ist dadurch möglich, daß die Triplex-Koeffizienten nicht mit voller Stellen-Genauigkeit berechnet werden müssen; dies ist jedoch nicht auf allen Rechenanlagen sinnvoll möglich.

Die Effektivität dieser verschiedenen Triplex-Basen wird in Kapitel IV und Kapitel V verglichen.

Tabelle (16.1): Zusammenstellung der Triplex-Koeff.

	primal	dual	primal-dual
"normale" Triplex-Koeff. (s. 2.4 - 2.5, 3.2 - 3.3, 10.1)	$w_j = -\frac{c_j}{\lvert c\rvert}$ $w_{n+i} = \frac{a_i \cdot c}{\lvert a_i\rvert \lvert c\rvert}$	$w'_j = \frac{-a_j \cdot b}{\lvert a_j\rvert \lvert b\rvert}$ $w'_{n+i} = -\frac{b_i}{\lvert b\rvert}$	$\overset{w}{w}_k = w_k - w'_k$
AT-Koeff. (s. 12.1)	$w_j \rightarrow -w_j$ $w_{n+i} \rightarrow w_{n+i}$	$w'_j \rightarrow -w'_j$ $w'_{n+i} \rightarrow w'_{n+i}$	$A_k = \begin{cases} -w_j \\ w_{n+i} \end{cases}$
normierte [2] Triplex-Koeff. (s. 11.1 - 11.3)	$\bar{w}_j = \frac{-c_j}{\lvert c\rvert \lvert a_i\rvert}$ $\bar{w}_{n+i} = \frac{\bar{c}\ \bar{a}_i}{\lvert c\rvert \lvert a_i\rvert}$	$\bar{w}'_j = \frac{-\bar{b}\ \bar{a}_j}{\lvert b\rvert \lvert a_j\rvert}$ $\bar{w}'_{n+i} = \frac{-b_i}{\lvert b\rvert \lvert a_i\rvert}$	$\bar{\overline{w}}_k = \bar{w}_k - \bar{w}_k$
notw. für p_1-/d_1-Basis [3] (s. 2.12, 3.7)	$-c_j$ $\frac{a_i c}{\lvert a_i\rvert}$	$\frac{-a_j b}{\lvert a_j\rvert}$ $-b_i$	
notw. für Rangfolge-Koeff. [1]	c_j ; $a_i c$	$a_j b$; $-b_i$	$+/-c_j$; $+/-a_j b$ $a_i c$; $-b_i$

1) gemeint ist: AT nach Rangfolge (§ 12, Variante 2).
3) und pd-Koeff. nach Rangfolge (s. 10.8-9).

2) mit $\bar{c} = \left\{\frac{c_j}{\lvert a_j\rvert}\right\}$; $\bar{b} = \left\{\frac{b_i}{\lvert a_i\rvert}\right\}$; $\bar{a}_i = \left\{\frac{a_{ij}}{\lvert a_j\rvert}\right\}$; $\bar{a}_j = \left\{\frac{a_{ij}}{\lvert a_i\rvert}\right\}$

Tabelle (16.2): Rechenaufwand für Triplex-Koeffizienten

In dieser Tabelle ist eine grobe Abschätzung für die Anzahl der Multiplikationen zur Berechnung der Triplex-Koeffizienten angegeben.

Koeff.	(für)	p	d	pd
"normal"	a_{ij}^2	m n	m n	m n
	S.P. [2]	m n	m n	2 m n
	gesamt	2 m n	2 m n	3 m n
Rangfolge-Koeff. [1]	S.P. [2] = gesamt	m n	m n	2 m n
normierte Koeff.	a_{ij}^2	m n	m n	m n
	S.P.	m n	m n	2 m n
	$\bar{a}_{ij}$	m n	m n	2 m n
	gesamt	3 m n	3 m n	5 m n

[1] wie bei Tabelle (16.1)

[2] S.P. = Skalarprodukte

Kapitel IV: Effektivitätsvergleiche der Triplex-Basen

§ 17 Spezialfälle

a) Effektivität bei extremen Triplex-Winkeln

Die Annahme, daß flachere Restriktionen eher optimale NBR sind, legt die Frage nahe:
Sind extrem flache bzw. steile Restriktionen ($\varphi = 0^o$ bzw. $\varphi = 180^o$) sicher optimale NBR bzw. BR?
Und: Hat die pd-Basis in solchen Fällen auch Vorteile?

Hierfür sind mehrere Fälle zu unterscheiden:

I. Extreme Winkel bei NBR

1. p-Problem:
Annahme: $\exists_{j \in J}: w_j = +/- 1 \Leftrightarrow \varphi_j = 0^o/180^o$

$\Leftrightarrow \frac{c_j}{c} = -/+ 1 \Leftrightarrow L = -/+ c_j \cdot x_j$

$\Leftrightarrow c = \{0,\ldots,0, -/+c_j,0,\ldots,0\}$

$\Rightarrow$ c - und damit auch L - ändert sich nur bei AT von x_j;
$\Rightarrow$ jede Basisdarstellung, bei der x_j NBV bleibt, ist also dual zulässig / dual nicht zulässig.

2. d-Problem:
Annahme: $\exists_{i \in I}: w'_{n+i} = +/- 1 \Leftrightarrow \varphi^*_{n+i} = 0^o/180^o$

$\Leftrightarrow \frac{b_i}{b} = +/- 1 \Leftrightarrow L' = +/- b_i u_{n+i}$

$\Leftrightarrow b = \{0,\ldots,0, +/-b_i,0,\ldots,0\}$

$\Rightarrow$ b - und damit auch L' - ändert sich nur bei AT von u_{n+i} (d.h. auch x_{n+i});

jede Basisdarstellung, bei der x_{n+i} (primale) BV bleibt, ist also (primal) zulässig / nicht zulässig.

II. Extreme Winkel bei BR

3. p-Problem:

Annahme: $\exists_{i \in I} : w_{n+i} = +/- 1 \Leftrightarrow \varphi_{n+i} = 0^o/180^o$

$\Leftrightarrow a_{n+i} = +/- z \cdot c$ (wegen (2.2))

mit $z \in R$, $z > 0$ und a_{n+i} wie in (2.2)

$\Leftrightarrow L = -/+ \bar{z}\, x_{n+i} + \text{const.}$ mit $\bar{z} = 1/z$

(wegen $L = c\,x$ und $x_{n+i} = -a_{n+i} x + b_i$)

$\Rightarrow$ bei beliebigem AT von x_{n+i} entsteht ein Vektor $c = \{0,\ldots,0, -/+ \bar{z},0,\ldots,0\}$, der sich dann nur noch durch Rücktausch von x_{n+i} ändert;

$\Rightarrow$ jede Basisdarstellung, bei der x_{n+i} NBV wird, ist also dual zulässig / dual nicht zulässig.

4. d-Problem:

Annahme: $\exists_{j \in J} : w'_j = +/- 1 \Leftrightarrow \varphi'_j = 0^o/180^o$

$\Leftrightarrow a_j = +/- z' \cdot b$ (wegen (3.1))

mit $z' \in R$, $z' > 0$ und a_j wie in (3.1)

$\Leftrightarrow L' = -/+ \bar{z}'\, u_j + \text{const.}$ mit $\bar{z}' = 1/z'$

(wegen $L' = -u\,b$ und $u_j = a_j\, u - c_j$)

$\Rightarrow$ bei beliebigem AT von x_j entsteht ein Vektor $b = \{0,\ldots,0, +/- \bar{z}',0,\ldots,0\}$, der sich nur noch durch Rücktausch von x_j ändert;

$\Rightarrow$ jede Basisdarstellung, bei der u_j duale NBV wird (d.h. x_j wird primale BV), ist also primal zulässig / primal nicht zulässig.

17.1 Satz

1. Für jedes $k \in I \cup J$ mit $\varphi_k = 180^o$ bzw. $\varphi_k = 180^o$ gilt:
   In jeder optimalen Basisdarstellung ist x_k BV bzw. NBV.

2. Für jedes $k \in I \cup J$ mit $\varphi_k = 0^o$ bzw. $\varphi_k' = 0^o$ gilt:
   Jede Basisdarstellung mit x_k als NBV bzw. BV ist dual bzw. primal zulässig.

Beweis: Dieser Satz ist nur eine anders angeordnete Zusammenstellung aus den Ergebnissen der vorangegangenen Fallunterscheidung.

17.2 Folgerung/Bemerkung

1. Nach Satz 17.1 ist das primale und das duale Triplex-Verfahren für große Triplex-Winkel effektiver als für kleine;
dies entspricht den Ergebnissen des § 6, da sich für flache Restriktionen Redundanz ungünstig auswirkt, für steile aber nicht, da diese ohnehin BR werden.

2. p-Basis und d-Basis erscheinen in Satz 17.1 in dem Sinne als gleichwertig, als zueinander duale Aussagen gelten.

3. Dennoch liegt es nahe, bei rechteckigen Matrizen A eine der Triplex-Varianten vorzuziehen:
für $n > m$ werden die BI mit der p-Basis bestimmt;
für $m > n$ werden die NBI (die dualen BI) mit der d-Basis bestimmt.

17.3 Satz

1. Für jedes $k \in I \cup J$ mit $W_k = 2$ gilt:
   k ist optimaler NBI, und jede Basisdarstellung mit x_k als NBV ist zulässig.

2. Für jedes $k \in I \cup J$ mit $W_k = -2$ gilt:

k ist optimaler BI, und jede Basisdarstellung mit x_k als BV ist dual zulässig.

(Hierbei wird das Problem als lösbar angenommen.)

Beweis:

$W_k = 2 \Leftrightarrow w_k = 1,\ w'_k = -1 \Leftrightarrow \varphi_k = 0^\circ,\ \varphi'_k = 180^\circ$

$W_k = -2 \Leftrightarrow w_k = -1,\ w'_k = 1 \Leftrightarrow \varphi_k = 180^\circ,\ \varphi'_k = 0^\circ$

Das weitere folgt unmittelbar aus Satz 17.1.

17.4 Folgerung

Da sich bei extremen pd-Koeffizienten die Aussagen über extreme p-Koeffizienten und extreme d-Koeffizienten kombinieren lassen, sind bei ihnen weitergehende Schlüsse über die Zugehörigkeit einer Variablen zur optimalen Basis möglich.

17.5 Bemerkung

Die Sätze 17.1 und 17.3 sind bei Triplex-Winkeln in der Nähe von 0° und 180° nicht mehr streng gültig; dennoch werden die Aussagen in solchen Fällen meistens auch noch richtig sein.

b) Effektivität bei Parallelität und Redundanz

Beim primalen Triplex-Verfahren werden bekanntlich flache redundante Restriktionen zu NBR bestimmt, obwohl es optimale BR sind (vgl. 6.4 - 6.5 und Beispiele 9.3 - 9.4).

Im folgenden wird gezeigt, daß das duale Triplex-Verfahren hier korrigierend wirkt: Bei der normierten d-Basis (vgl. 11.2 - 11.4) werden (primal) redundante Restriktionen eher zu NBR bestimmt als zu BR (Satz 17.6); da für die Redundanz im dualen Problem ein entsprechender Satz gilt (Satz 17.9), treten bei der normierten pd-Basis weniger Fehler durch die Auswahl primal oder dual redundanter Restriktionen auf als bei der p-Basis oder der d-Basis (Satz 17.9).

Parallelität ist ein Ideal-Typus einer Redundanz-Situation - umso mehr, als die Triplex-Winkel solcher Restriktionen gleich sind; wenn dieser Fall auch nicht häufig vorkommt wegen der damit verbundenen Linearen Abhängigkeit des Gleichungssystems, so ist es doch ein repräsentativer Grenzfall.

17.6 Satz

Ist eine von zwei Basis-Restriktionen redundant,
a) weil die Restriktionen parallel sind oder
b) weil einer oder mehrere positive Achsenabschnitte sich in derselben Richtung unterscheiden (d.h. $<$ oder $>$ sind),
so wird die redundante Restriktion durch die normierte d-Basis (Def. 11.2 - 11.4) eher als BR ausgewählt als die andere.

Beweis: o.B.d.A. sei $x_{n+1} \geq 0$ redundant gegenüber $x_{n+2} \geq 0$ durch Situation a) oder b);
es folgt: $x_{n+1} > x_{n+2}$ nach Def. 6.1.;

es ist zu zeigen: $\bar{b}_1 > \bar{b}_2$, denn dann ist $\bar{w}'_{n+1} > \bar{w}'_{n+2}$, d.h. x_{n+1} wird nach Def. 3.5 eher als BV ausgewählt.

a) Für parallele Ungleichungen

$$x_{n+1} = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i \geq 0 \quad (i = 1,2)$$

ist nach der Zeilennormierung $\bar{a}_{1j} = \bar{a}_{2j}$ $(j \in J)$, so daß aus $x_{n+1} > x_{n+2}$ folgt: $\bar{b}_1 > \bar{b}_2$.

b) Zunächst unterscheide sich nur der Achsenabschnitt auf der Achse x_1 (o.B.d.A.: $j = 1$); ferner kann vor der Normierung o.B.d.A. $b_1 = b_2$ angenommen werden, so daß $a_{1j} = a_{2j}$ $(j \neq 1)$.

Aus $x_{n+1} > x_{n+2}$ folgt wegen $x_{n+1} - x_{n+2} = (a_{21} - a_{11})x_1$: $a_{21} > a_{11}$.

Ferner ist $\operatorname{sign}(a_{i1}) = \operatorname{sign}(b_i)$ $(i = 1,2)$, da die Achsenabschnitte der Hyperebenen $x_{n+i} = 0$ auf der Achse x_1 nach Vor. positiv sind.

Also gilt nach der Normierung auf $|a_{n+i}| = 1$: $\bar{b}_1 > \bar{b}_2$.

Falls es weitere $j \in J$, $j \neq 1$ gibt mit $a_{2j} > a_{1j}$ für $b_1 = b_2$, so folgt nach der Normierung erst recht: $\bar{b}_1 > \bar{b}_2$.

17.7 Bemerkung

Satz 17.6 gilt auch für zusammengesetzte Parallelverschiebung und Veränderung positiver Achsenabschnitte in Richtung der Parallelverschiebung.

Noch einfacher wird Satz 17.6 , falls $\operatorname{sign}(a_{ij}) =$

sign(b_i) immer erfüllt ist, was in der Praxis häufig vorkommt:

17.8 Satz

Bei LP-Problemen mit nicht-negativen Koeffizienten (z.B. Transportproblem) gilt:
Ist eine Basis-Restriktion einer anderen gegenüber redundant, so wird sie durch die normierte d-Basis eher als BR ausgewählt als die andere.

Beweis: Alle Achsenabschnitte sind hier nicht-negativ. Redundanz kann nur noch durch den Fall b) in Satz 17.6 auftreten, der bereits bewiesen wurde.

17.9 Satz

Ist im dualen Problem eine von zwei (dualen) BR redundant,
a) weil die Restriktionen parallel sind oder
b) weil einer oder mehrere positive Achsenabschnitte sich in derselben Richtung unterscheiden,
so wird die redundante Restriktion durch die normierte p-Basis eher als (duale) BR ausgewählt als die andere; ihr Index wird also eher als NBI ausgewählt (vgl. 1.4, 1.5 und 1.7.2).

Beweis: Dies ist der duale Satz zu Satz 17.6 ; entsprechend verläuft der Beweis.

Mit Satz 17.6 und Satz 17.9 ergibt sich für das pd-Triplex-Verfahren der folgende Satz:

17.10 Satz

Ist im primalen oder im dualen Problem eine von zwei (primalen oder dualen) BR redundant,
a) weil die Restriktionen parallel sind oder
b) weil einer oder mehrere positive Achsenabschnitte sich in derselben Richtung unterscheiden,

so wird die redundante Restriktion durch die normierte pd-Basis eher als (primale oder duale) BR ausgewählt als durch die d- oder p-Basis.

Beweis: Es wird nur die p-Basis mit der pd-Basis verglichen; für die d-Basis läßt sich analog schließen:

a) Es ist $w_{n+1} = w_{n+2}$ wegen der Parallelität der primalen Restriktionen; die normierte - oder auch nicht normierte - p-Basis bewertet also beide Restriktionen gleich.
   Wegen $W_k = w_k - w'_k \quad (k \in I \cup J)$ (nach Def. 10.1)
   und $\bar{w}'_{n+1} < \bar{w}'_{n+2}$ (nach Satz 17.6) ist aber
   $$W_{n+1} > W_{n+2} ,$$
   so daß die redundante Restriktion $x_{n+1} \geq 0$ durch die normierte pd-Basis eher BR wird als $x_{n+2} \geq 0$.

b) Wegen $\bar{w}'_{n+1} < \bar{w}'_{n+2}$ ist $W_{n+1} - W_{n+2} < \bar{w}_{n+1} - \bar{w}_{n+2}$.
   Die kleinere Differenz zwischen den pd-Koeffizienten entspricht einer relativen Rang-Erniedrigung des Index n+1 gegenüber n+2, so daß x_{n+1} dort eher BV wird als bei der p-Basis.

c) Hinreichende Bedingungen für Entartungsfälle

Einige Entartungsfälle von LP-Problemen, die sich auf andere Art nicht so leicht erkennen lassen, werden mit Hilfe der p- und d-Koeffizienten ohne AT-Schritte erkannt:

17.11 Satz
Falls $w_k < 0$ für alle $k \in I \cup J$, so folgt:
Es gibt zulässige Punkte, aber max(L) ist nicht beschränkt.

Beweis: Wegen $w_k < 0$ bilden die äußeren Normalen aller Restriktionen mit grad L Winkel $> 90^\circ$, da $\cos \varphi_k < 0$. Auf einem Strahl in Richtung grad L sind von einem Wert L_o an alle Punkte zulässig, d.h. der zulässige Bereich ist in dieser Richtung nicht beschränkt.

17.12 Satz
Falls $w'_k < 0$ für alle $k \in I \cup J$, so folgt:
Das Problem hat keine zulässige Lösung.

Beweis:
Wegen Satz 17.11 hat das zum gegebenen LP-Problem duale Problem eine unendliche Lösung. Nach dem Dualitätssatz wird aber für ein konsistentes duales Problem Min $L' = -\infty$ genau dann erreicht, wenn das primale Problem inkonsistent ist (vgl. z.B. [13], Satz 5). Das gegebene LP-Problem hat also keine zulässige Lösung.

17.13 Bemerkung
Beide Sätze sind nicht nur für die Lineare Optimierung, sondern auch schon für Lineare Ungleichungssysteme von Bedeutung.

§ 18 Zufallsverteilte Koeffizienten

In § 7 und in Kapitel V wurden für die Beurteilung des Triplex-Verfahrens Mengen von LP-Problemen zugrundegelegt, die nur statistisch festgelegt waren durch die Verteilung der Triplex-Winkel bzw. der Problem-Koeffizienten.

Ein Effektivitätsvergleich von Triplex-Basen zu so allgemein formulierten Problemen hat gegenüber den in § 17 betrachteten speziellen Situationen den Vorteil, daß ein großes Spektrum praxisnaher Fälle erfaßt wird. Jedoch führt eine strenge statistische Beweisführung auf verschiedene Schwierigkeiten, z.B. schon deshalb, weil p- und d-Koeffizienten nicht vollständig unabhängig sind (vgl. 3.9 - 3.10).

Daher werden im folgenden statistisch vorgegebene Problemstellungen nur soweit untersucht, bis sich deutliche Hinweise auf Effektivitätsunterschiede ergeben; ohnehin haben die Sätze 5.3 und 5.4 schon wesentliche Anhaltspunkte für allgemeine Vorteile der pd-Basis ergeben (vgl. auch den Anfang von § 10).

18.1 Voraussetzung

Betrachtet werden LP-Probleme, für die gilt:

1. Alle Restriktionen, deren Gradienten denselben Winkel mit grad L bilden, werden mit gleicher Wahrscheinlichkeit erwartet.
2. Alle Restriktionen haben die gleiche Redundanz-Wahrscheinlichkeit.
3. Die Bedingungen 1. und 2. gelten im primalen und im dualen Problem.

18.2 Bemerkung

Die Voraussetzung 18.1.1 bedeutet eine rotationssymmetrische Verteilung der Triplex-Winkel bezüglich der Achse grad L.
Die Voraussetzungen sind daher allgemeiner als die Gleichverteilung der Raumwinkel in (7.1); sie sind praxisnäher auch als die statistischen Verteilungen in (7.2) und Kapitel V, da flache Winkel - als echte Beschränkungen - häufiger vorkommen.

18.3 Folgerung

1. Restriktionen deren Gradienten gleiche Winkel $|\varphi|$ mit grad L bilden, haben die gleiche Wahrscheinlichkeit $p_{opt}(\varphi)$, im Optimalpunkt aktiv zu sein, d.h.

$$|\varphi_1| = |\varphi_2| \Rightarrow p_{opt}(\varphi_1) = p_{opt}(\varphi_2).$$

2. Restriktionen mit kleineren Winkeln haben eine größere Wahrscheinlichkeit, d.h.

$$|\varphi_1| < |\varphi_2| \Rightarrow p_{opt}(\varphi_1) > p_{opt}(\varphi_2).$$

3. Die Funktion $p_{opt}(\varphi)$ ist streng monoton fallend.

4. Die Funktion $p_{opt}(w)$ mit $w = \cos\varphi$ ist streng monoton steigend.

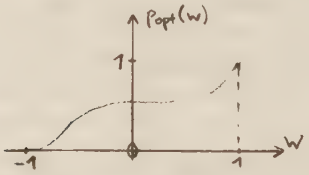
5. 1. - 4. gilt im primalen und im dualen Problem, d.h. es gibt ebenfalls eine monoton steigende Funktion $p'_{opt}(w')$.

Beweis: 1. und 2. folgt aus den Voraussetzungen 18.1.1 und 18.1.2 aus Symmetriegründen beim zulässigen Bereich; 3. und 4. folgt aus 1. und 2.
5. folgt aus Voraussetzung 18.1.3.

18.4 Bemerkung

Bei den in 18.1 betrachteten Problemen ist durch die Funktionen $p_{opt}(w)$ und $p'_{opt}(w')$ die Bemerkung 12.2 konkretisiert.

Nach § 7 und § 17 b) haben die Funktionen etwa den folgenden Verlauf:



18.5 Folgerung

Bei LP-Problemen, die die Voraussetzungen 18.1 erfüllen, gilt wegen 18.3.4 - 5:

Beim Übergang von den p- bzw. d-Koeffizienten zu den pd-Koeffizienten werden die einzelnen w_k bzw. w'_k ($k \in I \cup J$) im Mittel um Werte verändert, die monoton von der Wahrscheinlichkeit $p'_{opt}(w'=w'_k)$ bzw. von $p_{opt}(w=w_k)$ für die Optimalität des Index k abhängen.

18.6 Bemerkung

Aus 18.5 kann man zwar nicht unmittelbar eine Umstellung der Rangplätze schließen, die zu einer Verbesserung der Triplex-Basis führt;
es wird jedoch klarer als bei ganz allgemeinen Problemen, daß die d-Koeffizienten eine günstige Korrektur der p-Koeffizienten bilden und umgekehrt.
Die pd-Basis als Kombination dieser gleichwertigen Anteile dürfte daher im statistischen Mittel bei den betrachteten Problemen günstiger sein.

Kapitel V: Numerische Ergebnisse

Numerische Tests wurden durchgeführt, um die Effektivität der p-, d- und pd-Basis zu vergleichen. Aus den Arbeiten über das Triplex-Verfahren [11] und [12] lagen Testunterlagen und -ergebnisse vor, auf die teilweise bezug genommen werden konnte.

Die Tests bezogen sich vor allem auf die p_1-, d_1- und p_1d_1-Basis; auch das "pd-Triplex-Verfahren mit AT-Koeffizienten"(§ 12) wurde einbezogen. Dagegen waren die Probleme bereits so konstruiert, daß eine Normierung (§ 11) kaum wesentliche Änderungen gebracht hätte.

I. Beispiele mit festen Zahlen aus [11]

In der Arbeit [11] wurden 16 verschiedene Probleme mit nichtnegativen Koeffizienten im Hinblick auf die Effektivität der p_1-Basis getestet, und zwar eine feste (5×15)-Matrix A mit je 4 Vektoren b und c. Da Koeffizienten und optimale Indizes explizit angegeben waren, mußten nur noch d- und pd-Basis berechnet und mit den Ergebnissen verglichen werden. Für das pd-Verfahren mit AT-Koeff. in § 12, Variante 1, wurde $G_2 = 2$ gewählt.

Es ergaben sich folgende Ergebnisse:

Verfahren	NBI gesamt	anfangs richtig	in Triplex-Basis richtig	Δ r	AT-Schritte
p	80	34	34	0	80
d			24	- 10	80
pd			32	- 2	80
pd-AT-K.			59	+ 25	35

Die Ergebnisse sind insofern nicht ganz repräsentativ, als für die Koeffizienten b_i der Beispiele etwa gleich hohe positive Werte gewählt waren. Dies mag wegen Satz 5.3 für die p_1-Basis günstig sein; die d-Koeffizienten werden dadurch aber etwa gleich groß, so daß die Effektivität des dualen Triplex-Verfahrens in diesem Beispiel kaum geprüft wird.

Beim primalen Triplex-Verfahren sind 42,5 % der optimalen Indizes richtig bestimmt worden; dies ist aber gerade der Anteil, der im Ausgangsproblem bereits richtig war, so daß die Anwendung des Triplex-Verfahrens kaum gelohnt hat. Beim dualen Triplex-Verfahren ist das Ergebnis entsprechend der vorangegangenen Bemerkung etwas schlechter, so daß sich auch beim primal-dualen Verfahren keine Verbesserung gegenüber der p-Basis ergibt.

Ganz erheblich bessere Ergebnisse wurden bei unvollständigem Übergang zur Triplex-Basis - nach dem pd-Verfahren mit AT-Koeffizienten in § 12, Variante 1 - erzielt: Die so bestimmten NBI waren zu 73,8 % optimal; bei 35 (gegenüber 80 !) AT-Schritten wurde mindestens 25 mal ein notwendiger Austausch gewählt - wobei die AT-Schritte nach § 14 wesentlich weniger aufwendig sind als beim Simplex-Verfahren, da keine zusätzlichen Kriterien erforderlich sind.

Zusammenfassend ist festzustellen, daß die Erkenntnisse in § 7 und die daraus resultierenden Verfahren in § 12 eine deutliche Bestätigung erfahren, nämlich eine Auswertung nur der extremen Triplex-Winkel durchzuführen.
Die hohe Effektivität bei extremen Winkeln - noch mehr bei den nicht auszutauschenden Indizes - läßt erwarten, daß eine Suboptimierung im mittleren Winkelbereich (§ 13) bei großen Problemen vorteilhaft ist.

II. Beispiele mit zufallsverteilten Koeffizienten

Künzi/Kleibohm [12] haben das primale Triplex-Verfahren auch mit LP-Problemen mit zufallsgenerierten Problemdaten getestet; dabei wurden die BR kugelsymmetrisch verteilt um den Mittelpunkt (10,10,...) mit dem Abstand 10 +/- 3 , wobei die Abstände innerhalb dieses Spielraums gleichverteilt waren.

Ein direkter Vergleich dieser Ergebnisse mit d- und pd-Verfahren war leider nicht möglich, da die Originalunterlagen nicht mehr vorhanden waren. Daher wurden neue Testprogramme mit im wesentlichen denselben Parametern erzeugt. Es wurden wieder dieselben Matrix-Größen von 40 x 40 bis 8 x 72 verwendet. Der Mittelpunkt für die BR wurde beibehalten, allerdings mit den Abständen 10 +/- 4, um Redundanz-Einflüsse besser zu erfassen. Teilweise wurde auch das duale Problem zu einem solchen kugelförmigen Bereich transformiert; das ist mit einer Transformation des Vektors c, also der Richtung von grad L verbunden, die aber relativ gering ist und sich schon wegen der Symmetrie des Gebietes kaum auswirken kann.

Die Problemdaten waren programm-generierte Zufallszahlen im Bereich [-1,1] , wobei der Vektor b (bzw. auch c) noch transformiert werden mußte. Diese Probleme wurden dann nach dem "Kombinierten Primal-dual-Algorithmus" von Sondermann [20] optimiert. In einem zusätzlichen Algol-Programm wurden p-, d- und pd-Basis berechnet, und die zugehörigen Index-Listen wurden mit den zuvor bestimmten optimalen NBI verglichen.

Die Rechnungen wurden im Rechenzentrum der Universität Tübingen auf einer CDC 3300 durchgeführt.

Die Ergebnisse sind in einer Tabelle zusammengefaßt.

Tabelle:

Zusammenstellung der vorläufigen Ergebnisse beim Effektivitätsvergleich der Triplex-Basen bei zufallsgenerierten Koeffizienten

Problem						richtige NBI					
n	m	Int.	M_p	r_p	M_d	r_d	Anf.	p	d	pd	pd Komf.	pd At-k.	max
40	40				-	-	20	24	12	14	13	20	40
40	40				10	10±4	23	27	13	22	22	23	40
30	45				-	-	11	21	8	17	14	18	30
24	56	[-1,1]	10	10	-	-	4	11	7	11	9	12	24
24	56	(alle		±4	10	10±4	8	15	5	10	10	11	24
16	64	Koeff.)			-	-	0	9	4	11	9	12	16
8	72				-	-	0	5	1	6	4	6	8
8	72				-	10	1	5	0	5	5	5	8
						10±4							

(mittelpunkt M
Abstand r
(primal/dual)

Auswertung der Ergebnisse zu Teil II

Im zweiten Teil der numerischen Tests sind die an die Effektivität der neuen Triplex-Verfahren gestellten Erwartungen im wesentlichen erfüllt worden, wenn auch vielleicht noch klarere Ergebnisse hätten erhofft werden können.

Bei den acht Beispielen schneidet die d-Basis etwas schlechter ab als die p-Basis, so daß auch die pd-Basis nur teilweise richtiger ist als die p-Basis. Immerhin wählt die pd-Basis in den Beispielen erheblich mehr Restriktionen richtig aus als das arithmetische Mittel von p- und d-Basis, in zwei der acht Fälle sogar mehr als beide von ihnen.

Es muß aber darauf hingewiesen werden, daß die d-Basis für die zu den acht Problemen dualen Probleme effektiver ist als deren p-Basis, da die d-Basis des dualen Problems gerade die p-Basis des gegebenen Problems ist. Zu jedem Problem, in dem eine der beiden Basen richtiger ist, gibt es also sofort ein weiteres, in dem gerade die andere effektiver ist.

Relativ gut ist ebenso wie im Teil I der numerischen Tests das pd-Verfahren mit AT-Koeffizienten (hier mit Variante 1 im § 12).

Literaturverzeichnis

1 M.L.Balinski, R.E.Gomory, A Mutual Primal-dual Simplex Method. In P.Wolfe, L.Cutler (Eds): Recent Advances in Mathematical Programming. New York: McGraw-Hill 1963, 17 - 26

2 H.-J.Bartsch, Mathematische Formeln. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1962

3 E.M.L.Beale, Mathematical Programming in Practice. London: Pitman 1968

4 G.B.Dantzig, Lineare Programmierung und Erweiterungen. Berlin, Heidelberg: Springer 1966

5 F.Erwe, Differential- und Integralrechnung II. Mannheim: Bibliographisches Institut 1968

6 M.Fisz, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik. Berlin: Verlag der Wissenschaften 1965

7 R.Frisch, The Multiplex Method for Linear Programming. Oslo: Univ. Inst. of Economics 1955

8 D.B.Judin, E.G.Golstein, Lineare Optimierung. Berlin: Akademie-Verlag 1968

9 B.Krekó, Lehrbuch der Linearen Optimierung. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1964

10 H.P.Künzi, Die Duoplex-Methode. Unternehmensforschung 7 (1963) 103 - 116

11 H.P.Künzi, K.Kleibohm, Das Triplex-Verfahren. In Operations Research Verfahren V. Meisenheim: Anton Hain Verlag 237 - 247

12 H.P.Künzi, K.Kleibohm, Das Triplex-Verfahren. Unternehmensforschung 12 (1968) 145 - 154

13 H.P.Künzi, S.Tan, Lineare Optimierung großer Systeme. Lecture Notes in Mathematics 27 (1966)

14 H.P.Künzi, H.Tschach, The Duoplex Algorithm. Numerische Mathematik 7 (1965) 222 - 225

15 C.E.Lemke, The dual method of solving the linear programming problem. Naval Res. Logist. Quart. 1 (1954) 36 - 47

16 H.Müller-Merbach, Die symmetrische revidierte Simplex-Methode in der Linearen Planungsrechnung. Elektronische Datenverarbeitung 7 (1965) 105 - 113

17 F.Nožička, J.Guddat, H.Hollatz, Theorie der Linearen Optimierung. Berlin: Akademie-Verlag 1972

18 W.Orchard-Hays, Advanced Linear-programming Computing Techniques. New York: McGraw-Hill 1968

19 R.E.Quandt, H.W.Kuhn, Upper bounds for the number of iterations in solving linear programs. Operations Research 12 (1964) 161 - 165

20 D.Sondermann, Der Kombinierte Primal-dual-Algorithmus - eine neue Simplex-Methode. Elektronische Rechenanlagen 9 (1967) 32 - 39

21 S.N.Tschernikow, Lineare Ungleichungen. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1971

22 A.W.Tucker, Dual Systems of Homogenous Linear Relations. In H.W.Kuhn, A.W.Tucker (Eds.): Linear Inequalities and Related Systems. Princeton 1956

23 W.Vogel, Lineares Optimieren. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft 1967

24 P.Wolfe, L.Cutler, Experiments in Linear Programming. In R.Graves, P.Wolfe (Eds.): Recent Advances in Mathematical Programming. New York: McGraw-Hill (1963) 177 - 200

Lebenslauf

Am 31.3.1946 wurde ich, Konrad Gerull, als Sohn des Justizinspektors Dietrich Gerull und seiner Ehefrau Rosemarie, geb. Dewitz, in Stadthagen geboren. Vom damaligen Wohnort Wiersen aus ging ich ab 1952 zur Volksschule im Nachbarort Schoholtensen; ab 1954 besuchte ich die Volksschule in Bückeburg, von 1956 bis 1960 das Gymnasium Adolfinum in Bückeburg und dann bis zum Abitur im Frühjahr 1965 das Hölty-Gymnasium in Wunstorf.

Danach studierte ich Mathematik und Physik an der TU Berlin. Nach der Diplom-Vorprüfung in Mathematik wechselte ich zum Sommer 1968 an die Universität Tübingen, wo ich im Sommer 1971 das Studium mit dem Diplom in Mathematik und dem Staatsexamen mit den Hauptfächern Mathematik und Physik abschloß.

Im Anschluß an meine Diplomarbeit entstand unter der Leitung von Prof. Dr. K. Zeller die vorliegende Dissertation "Primal-duale Triplex-Verfahren".

Meine akademische Ausbildung verdanke ich den Herren Professoren und Dozenten G.Betsch, S.Bruhn, H.Haack, A.Haug, K.Leichtweiß, G.Michler, R.Mühleisen, H.Salzmann, K.Weichselberger, H.Wielandt und K.Zeller.

Druck: SPRINT-DRUCK GmbH
7 Stuttgart 30, Wiener Str. 117
Telefon 81 26 69

Druck: SPRINT-DRUCK GmbH
7 Stuttgart 30, Wiener Str. 117
Telefon 81 26 69